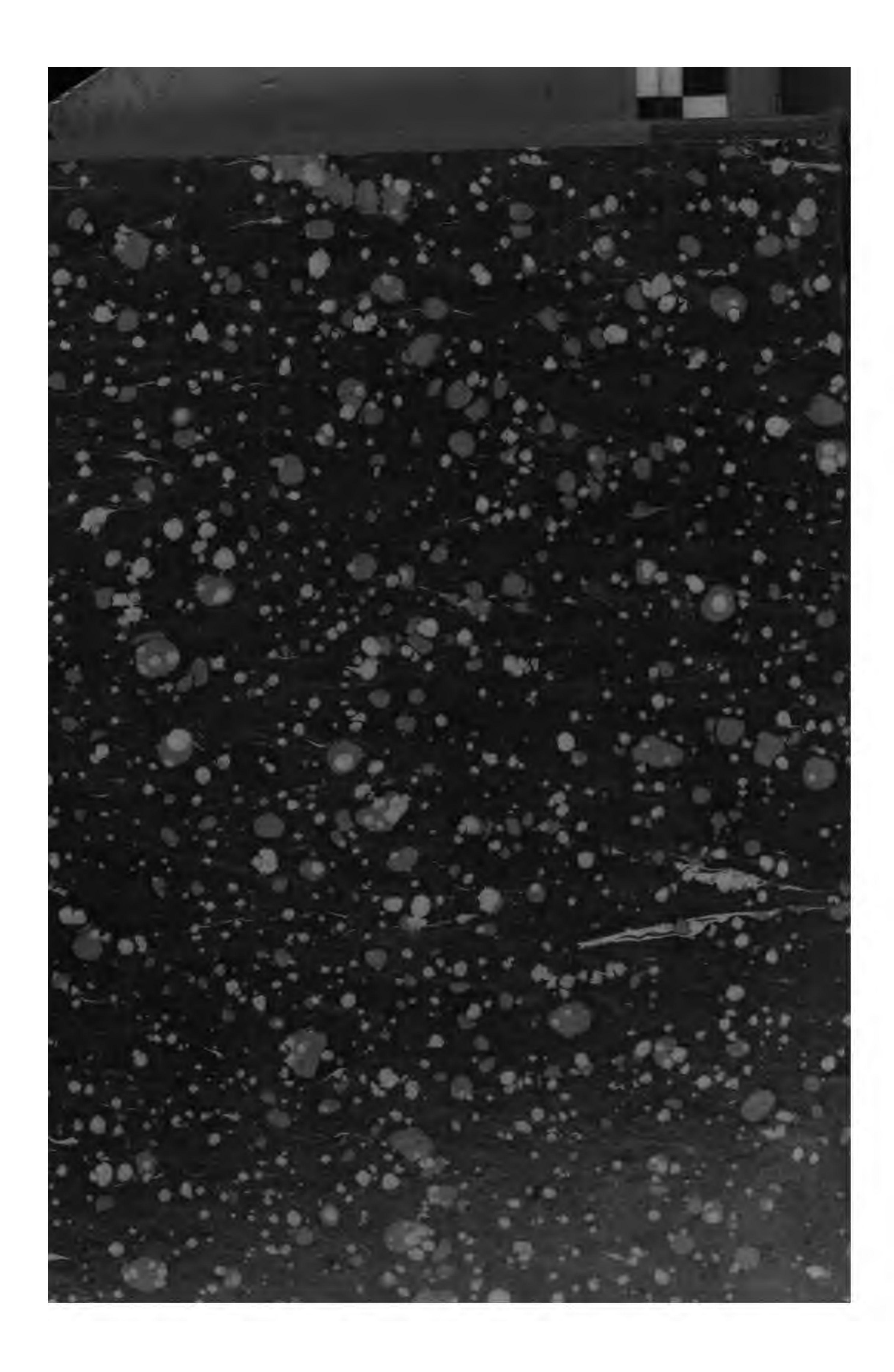

Stanford University Libraries
3 6105 000 994 199





Journal

für die

reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826.

Herausgegeben

unter Mitwirkung der Herren

Frobenius, Hettner, Knoblauch, Lampe, Schottky, Schwarz

von

K. Hensel.

Mit tätiger Beförderung hoher Königlich Preußischer Behörden.

Band 134.

In vier Heften.

Berlin,
W. 35, Lützowstraße 107/8.

Druck und Verlag von Georg Reimer.

1908.

Inhaltsverzeichnis des Bandes 134.

Primäre und sekundäre polare Räume einer linearen Strahlenkongruenz.

Von Herrn *Stanislaus Jolles* in Halensee.

Die beiden Systeme polarer Räume, für welche eine lineare Strahlenkongruenz C_1^1 polarinvariant ist, hat *v. Staudt* entdeckt*). Die polaren Räume des einen Systems enthalten die durch die lineare Kongruenz in ihren Strahlen hervorgerufenen Punkt- und Ebeneninvolutionen, die des anderen Systems enthalten diese Involutionen nicht. Erstere polaren Räume werden in den folgenden Untersuchungen als *primäre*, letztere als *sekundäre* polare Räume der linearen Strahlenkongruenz bezeichnet. — Das Gebüsch der primären polaren Räume von C_1^1 wird synthetisch ermittelt und dann das Verhältnis der primären und sekundären polaren Räume von C_1^1 zur Kongruenz und zueinander. Eingehende Beachtung finden dabei solche primären polaren Räume, die für primäre bzw. sekundäre polare Räume von C_1^1 polarinvariant sind.

1. Zwei durch eine lineare Strahlenkongruenz C_1^1 einander zugeordnete Punkte P, P' liegen auf einem Strahle p von C_1^1. Sind nun R_1^2, R_2^2 zwei durch je eine Regelschar 2. Ordnung von C_1^1 gehende Flächen eines F^2 Büschels und gehört P zu keiner von beiden, so sind die Polaren p_1, p_2 von p für R_1^2 bzw. R_2^2 windschief zu p und — wenn vorausgesetzt wird, daß p nicht mit einem solchen Strahle von C_1^1 zusammenfällt, der R_1^2 und R_2^2 im nämlichen Punkte berührt — windschief zueinander. Die Polarebenen von P für die Flächen R_1^2, R_2^2 gehen durch P'**), folglich bilden die Polarebenen

*) Beiträge zur Geometrie der Lage, 1. Heft, Nürnberg 1856, Nr. 105 und 109.

**) *v. Staudt*, a. a. O. Nr. 105.

von P für die Flächen des F^2 Büschels einen Ebenenbüschel 1. Ordnung, dessen Achse $\mathfrak{p}$ nicht nur mit p_1, p_2, sondern auch mit p inzident ist. Durchläuft P die Gerade p, so beschreibt die an p, p_1, p_2 hingleitende Gerade $\mathfrak{p}$ eine Regelschar 2. Ordnung. Ihre Leitschar besteht aus den Polaren von p für die Flächen des F^2 Büschels, und da sie p enthält, so ist p für eine Fläche des F^2 Büschels autopolar und liegt also auf ihr. Die durch einen beliebigen Punkt P gehende Fläche des F^2 Büschels geht somit auch durch den mit P inzidenten Strahl p von C_1^1. Hieraus folgt:

> Enthalten zwei Flächen eines F^2 Büschels je eine reelle Regelschar 2. Ordnung einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1, so enthalten auch alle übrigen reellen Flächen des F^2 Büschels je eine reelle Regelschar 2. Ordnung von C_1^1.

Eine beliebige Gerade g schneidet die Flächen eines F^2 Büschels in den Punktepaaren einer Involution. Enthalten die Flächen des F^2 Büschels je eine Regelschar einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1, so haben sie folglich mit der Regelschar 2. Ordnung von C_1^1, zu deren Leitstrahlen g gehört, die Strahlenpaare einer Strahleninvolution gemein, d. h.:

> Die Flächen eines F^2 Büschels, welche je eine Regelschar 2. Ordnung einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 enthalten, schneiden eine beliebige Regelschar 2. Ordnung von C_1^1 in den Strahlenpaaren einer Involution.

2. Zwei Flächen, welche je eine Regelschar 2. Ordnung einer linearen Strahlenkongruenz enthalten, schneiden sich außer in den Leitgeraden u, v der Kongruenz noch in zwei reellen oder konjugiert imaginären Kongruenzstrahlen. Bei einer hyperbolischen linearen Strahlenkongruenz haben also die F^2 Büschel, deren Flächen je eine Regelschar der Kongruenz enthalten, teils vier reelle Grundstrahlen, teils nur die beiden reellen Grundstrahlen u, v. Bei einer elliptischen linearen Strahlenkongruenz hingegen sind entweder alle vier Grundstrahlen jener F^2 Büschel imaginär, oder nur u, v allein. Ein solcher F^2 Büschel mit vier imaginären Grundstrahlen enthält auch ∞^1 imaginäre Flächen. Da nun in den polaren Räumen seiner reellen Flächen die durch die elliptische Strahlenkongruenz einander zugeordneten Punkte und Ebenen konjugiert sind, so sind sie es auch in den polaren Räumen seiner imaginären Flächen. Ferner sind die Polaren eines Kongruenzstrahles s in den polaren Räumen der reellen Flächen dieses F^2 Büschels

Strahlen einer Regelschar 2. Ordnung der Kongruenz*), folglich sind die übrigen Strahlen dieser Regelschar die Polaren von s in den polaren Räumen der imaginären Flächen dieses F^2 Büschels. Eine elliptische lineare Strahlenkongruenz ist demnach auch für die polaren Räume der imaginären Flächen des F^2 Büschels polarinvariant. Kurz, es gilt mit Rücksicht auf die in der Einleitung eingeführte Bezeichnung:

> Eine elliptische lineare Strahlenkongruenz wird auch durch unendlich viele primäre polare Räume mit imaginären Inzidenzflächen in sich selbst übergeführt.

3. Sind die durch eine lineare Strahlenkongruenz C_1^1 einander zugeordneten Punkte und Ebenen in zwei polaren Räumen Π_1^2, Π_2^2 konjugiert, so sind sie es auch in den polaren Räumen des durch Π_1^2, Π_2^2 gehenden Büschels polarer Räume. Die reellen Inzidenzflächen der polaren Räume dieses Büschels enthalten je eine reelle Regelschar 2. Ordnung von C_1^1, folglich erweisen sich analog wie in 2. alle seine polaren Räume als primäre polare Räume von C_1^1, und es kann demnach der Satz ausgesprochen werden:

> Zwei primäre polare Räume einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 bestimmen einen Büschel solcher polaren Räume. Die reellen Inzidenzflächen der polaren Räume des Büschels sind Regelflächen 2. Ordnung, von denen je eine Regelschar zu C_1^1 gehört.

4. Durch drei polare Räume Π_1^2, Π_2^2, Π_3^2, die nicht alle drei einem Büschel angehören, geht ein Bündel polarer Räume. Führt jeder dieser drei polaren Räume die lineare Strahlenkongruenz derart in sich selbst über, daß die durch C_1^1 einander zugeordneten Punkte und Ebenen in ihnen konjugiert sind, so hat jeder polare Raum eines durch zwei von den drei polaren Räumen Π_1^2, Π_2^2, Π_3^2 bestimmten Büschels nach 3. dieselbe Eigenschaft. Ein beliebiger Büschel des Bündels hat nun mit jedem Büschel, der zwei der polaren Räume Π_1^2, Π_2^2, Π_3^2 verbindet, einen polaren Raum gemein, folglich enthält er nach 3. nur polare Räume, für die C_1^1 polarinvariant ist, und in denen die durch C_1^1 einander zugeordneten Punkte und Ebenen konjugiert sind. Demnach ist bewiesen:

*) *v. Staudt,* a. a. O., Nr. 105.

Drei keinem Büschel angehörige primäre polare Räume einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 bestimmen einen Bündel solcher polaren Räume.

Einen Bündel primärer polarer Räume von C_1^1 bilden die polaren Räume aller Regelflächen 2. Ordnung, die je eine Regelschar 2. Ordnung von C_1^1 enthalten und durch einen beliebigen Punkt des Raumes, also durch den mit ihm inzidenten Kongruenzstrahl gehen.

5. Durch vier polare Räume, die nicht alle einem Bündel angehören, geht ein Gebüsch polarer Räume. Führt jeder von diesen vier polaren Räumen die lineare Strahlenkongruenz C_1^1 derart in sich über, daß die durch C_1^1 einander zugeordneten Punkte und Ebenen in ihnen konjugiert sind, so läßt sich in analoger Weise wie in 4. dartun, daß alle polaren Räume des Gebüsches dieselbe Eigenschaft haben. Durch einen beliebigen Punkt sendet das Gebüsch einen Bündel von Inzidenzflächen seiner polaren Räume. Er besteht aus allen durch diesen Punkt gehenden Regelflächen 2. Ordnung, die je eine Regelschar von C_1^1 enthalten (4.). Die reellen Inzidenzflächen der polaren Räume des Gebüsches sind also identisch mit allen Regelflächen 2. Ordnung, die je eine Regelschar 2. Ordnung von C_1^1 enthalten, und das Gebüsch besteht folglich nach 2. und 3. aus allen polaren Räumen, die C_1^1 derart in sich überführen, daß die durch C_1^1 einander zugeordneten Punkte und Ebenen in ihnen konjugiert sind. In anderen Worten:

Die primären polaren Räume einer linearen Strahlenkongruenz bilden ein Gebüsch. Die reellen Inzidenzflächen dieser polaren Räume bilden alle Regelflächen 2. Ordnung, welche je eine Regelschar 2. Ordnung der Kongruenz enthalten.

6. Liegen zwei Regelscharen 2. Ordnung einer *hyperbolischen* linearen Strahlenkongruenz bzw. auf je einer Fläche eines F^2 Büschels, so geht jede Fläche des Büschels nach 1. durch je eine Regelschar der Kongruenz. Die Grundkurve des F^2 Büschels besteht aus den Leitgeraden u, v der hyperbolischen linearen Kongruenz und, wenn wir voraussetzen, daß jene beiden Regelscharen zwei reelle Strahlen m, n gemein haben, aus den Kongruenzstrahlen m, n. Diese Kongruenzstrahlen sind das eine Paar, die Leitgeraden u, v das andere Paar Gegenseiten eines einfachen Raumvierseits, dessen Diagonalen zwei Kongruenzstrahlen a, b sind. a, b sind reziproke Polaren für die Flächen des F^2 Büschels, und die durch die hyperbolische

lineare Kongruenz einander zugeordneten Punkte und Ebenen von a, b sind für alle Flächen des F^2 Büschels konjugiert.

Haben zwei Regelflächen 2. Ordnung R_1^2, R_2^2, welche durch je eine Regelschar 2. Ord. einer *elliptischen* linearen Strahlenkongruenz gehen, keine reellen Strahlen gemein, und ist x ein weder auf R_1^2 noch auf R_2^2 gelegener Kongruenzstrahl, so sind die Polaren x_1, x_2 von x für R_1^2 bzw. R_2^2 durch diese Flächen von x harmonisch getrennt. Die durch x, x_1, x_2 gehende Regelfläche 2. Grades $\mathfrak{X}^2$ hat also mit R_1^2 bzw. R_2^2 reelle Punkte gemein. Sie liegen, da x, x_1, x_2 durch eine Regelschar 2. Ordnung $\mathfrak{X}^2$ der Kongruenz verbunden werden, auf je zwei Kongruenzstrahlen p_1, q_1 bzw. p_2, q_2. Zur Regelschar $\mathfrak{X}^2$ gehören hiernach je zwei Strahlen von R_1^2 und R_2^2 und je ein Paar reziproker Polaren x, x_1 bzw. x, x_2 für jede dieser beiden Flächen. $\mathfrak{X}^2$ ist folglich für R_1^2 und R_2^2 polarinvariant, und zwar rufen die polaren Räume von R_1^2 und R_2^2 in $\mathfrak{X}^2$ zwei hyperbolische Involutionen mit den Doppelstrahlen p_1, q_1 bzw. p_2, q_2 hervor. R_1^2, R_2^2 haben der Voraussetzung nach keine reellen Strahlen gemein, die bzw. auf ihnen gelegenen Strahlenpaare p_1, q_1 bzw. p_2, q_2 von $\mathfrak{X}^2$ trennen sich also nicht. Folglich haben jene beiden in $\mathfrak{X}^2$ hervorgerufenen hyperbolischen Involutionen ein reelles Strahlenpaar a, b gemein. a, b sind reziproke Polaren sowohl für R_1^2 wie für R_2^2 und folglich für den durch die polaren Räume von R_1^2 und R_2^2 gehenden Büschel. In allen seinen polaren Räumen sind nach 3. die durch C_1^1 einander zugeordneten Punkte und Ebenen konjugiert, und jeder von ihnen führt C_1^1 in sich selbst über. Der Büschel polarer Räume enthält, da R_1^2 und R_2^2 der Voraussetzung nach keine reellen Strahlen miteinander gemein haben, auch ∞^1 polare Räume mit imaginären Inzidenzflächen. Als Ergebnis der Untersuchungen dieser Nummer folgt also:

> Haben die Inzidenzflächen, welche bei einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 zu einem Büschel primärer polarer Räume gehören, vier oder keine reellen Strahlen gemein, so haben die polaren Räume des Büschels zwei reelle Strahlen von C_1^1 zu gemeinsamen reziproken Polaren.

7. Zwei windschiefe Strahlen a, b einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 und die durch C_1^1 in ihnen hervorgerufenen Punkt- und Ebeneninvolutionen bestimmen einen Büschel polarer Räume, welche a, b zu reziproken Polaren haben und jene Punkt- und Ebeneninvolutionen enthalten. Die Doppelebenen der durch C_1^1 in a bzw. b hervorgerufenen Ebeneninvolutionen sind je ein Paar ausgearteter Inzidenzflächen dieser polaren Räume. Ganz

wie in 1. läßt sich zeigen, daß die reellen Inzidenzflächen dieser polaren Räume durch je eine Regelschar 2. Ordnung von C_1^1 gehen, und daß also der Büschel nach 3. aus primären polaren Räumen von C_1^1 besteht. Somit ist dargetan:

> Je zwei windschiefe Strahlen einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 sind reziproke Polaren für einen Büschel primärer polarer Räume von C_1^1.

8. Zwei windschiefe Strahlen a, b einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 bestimmen nach 7. einen Büschel primärer polarer Räume von C_1^1 mit den gemeinschaftlichen reziproken Polaren a, b. Durch die polaren Räume dieses Büschels sind einem zu a, b windschiefen Kongruenzstrahle x als Polaren die Strahlen einer durch a, b gehenden Regelschar 2. Ordnung von C_1^1 zugeordnet. Da diese nach 1. auch den Strahl x enthält, so besteht demnach die Beziehung:

> Sind von vier zueinander windschiefen Strahlen a, b, c, d einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 sowohl die Strahlen a, b, wie c, d reziproke Polaren in einem primären polaren Raume von C_1^1, so gehören sie einer Regelschar zweiter Ordnung der Kongruenz an.

9. Zwei windschiefe Strahlen a, b einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 werden mit einem beliebigen zu ihnen windschiefen Strahle x von C_1^1 durch eine Regelschar $\mathfrak{X}^2$ der Kongruenz verbunden. Sind a, b — was nunmehr vorausgesetzt wird — reziproke Polaren in einem primären polaren Raume Π^2 von C_1^1, so enthält $\mathfrak{X}^2$ nach 8. auch die x in Π^2 zugeordnete Polare. Alle durch a, b gehenden Regelflächen 2. Ordnung, welche durch je eine Regelschar 2. Ordnung von C_1^1 gehen, sind also für Π^2 polarinvariant. Das Gleiche gilt von denjenigen Regelflächen 2. Ordnung, welche je eine Regelschar 2. Ordnung von C_1^1 und zwei windschiefe in Π^2 zueinander polare Kongruenzstrahlen c, d enthalten. Die durch a, b bzw. c, d und je eine Regelschar 2. Ordnung von C_1^1 gehenden Flächen 2. Ordnung bilden zwei F^2 Büschel. Sind a, b, c, d untereinander windschief, so haben diese beiden F^2 Büschel die durch jene vier Strahlen gehende Fläche 2. Ordnung gemein und gehören also einem F^2 Bündel an. Jeder von beiden Büscheln sendet eine Fläche durch einen beliebigen Kongruenzstrahl x. Diese beiden Flächen enthalten auch die Polare von x in Π^2, sie bestimmen einen im F^2 Bündel enthaltenen Büschel, dessen Flächen je eine Regelschar 2. Ordnung von C_1^1 enthalten und für Π^2 polarinvariant sind. Fällt x nacheinander mit allen Kongruenz-

strahlen zusammen, so ergeben sich auf diese Weise alle reellen Flächen des F^2 Bündels als polarinvariant für Π^2.

Der F^2 Bündel kann imaginäre Flächen enthalten; es fragt sich, ob auch diese, d. h. ihre polaren Räume, für den polaren Raum Π^2 polarinvariant sind. Durch zwei reelle Flächen des F^2 Bündels geht ein in ihm enthaltener F^2 Büschel. Seine reellen Flächen sind für Π^2 polarinvariant. Alle Flächen dieses Büschels sind nach 3. Inzidenzflächen primärer polarer Räume von C_1^1, folglich bilden in diesen polaren Räumen die Polaren eines beliebigen Kongruenzstrahles r eine in C_1^1 enthaltene zum F^2 Büschel projektive Regelschar 2. Ordnung $\mathfrak{R}^2$. Durch Π^2 geht jede reelle Fläche des F^2 Büschels in sich selbst über, reziproke Polaren für jede solche Fläche also wiederum in reziproke Polaren dieser Fläche. Π^2 führt demnach den Strahl r und die zum F^2 Büschel projektive Regelschar $\mathfrak{R}^2$ in einen Kongruenzstrahl r_π und eine zum F^2 Büschel projektive in C_1^1 enthaltene Regelschar $\mathfrak{R}^2_\pi$ derart über, daß die Polaren von r und r_π für die nämlichen reellen Flächen des F^2 Büschels homologe Strahlen der beiden projektiven Regelscharen $\mathfrak{R}^2, \mathfrak{R}^2_\pi$ sind. Nun bilden die Polaren von r_π für alle Flächen des F^2 Büschels eine zu ihm und somit auch zu $\mathfrak{R}^2_\pi$ projektive Regelschar 2. Ordnung. Beide projektiven Regelscharen haben die Polaren von r_π für die reellen Flächen des F^2 Büschels entsprechend gemein, folglich auch die Polaren von r_π für die imaginären Flächen des Büschels. Durch den polaren Raum Π^2 werden also zwei Strahlen von C_1^1, die reziproke Polaren für eine reelle oder imaginäre Fläche des F^2 Büschels sind, wiederum in zwei für die nämliche Fläche zueinander polare Kongruenzstrahlen übergeführt. Die polaren Räume der Flächen des F^2 Büschels sind aber primäre polare Räume von C_1^1, die in den Kongruenzstrahlen durch C_1^1 hervorgerufenen Punkt- und Ebeneninvolutionen sind demnach in diesen polaren Räumen enthalten, folglich wird jeder polare Raum einer Fläche des F Büschels durch Π^2 in sich selbst übergeführt, oder:

Die primären polaren Räume einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1, welche für einen primären polaren Raum dieser Kongruenz polarinvariant sind, bilden einen Bündel. Sind zwei primäre polare Räume von C_1^1 für einen primären polaren Raum dieser Kongruenz polarinvariant, so ist es auch jeder polare Raum des von ihnen bestimmten Büschels.

10. Je zwei zu einem Gebüsche polarer Räume gehörige Bündel haben einen Büschel polarer Räume gemein. Da nun nach 5. alle primären polaren Räume einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 ein Gebüsch bilden, so bilden alle für zwei primäre polare Räume von C_1^1 polarinvarianten primären polaren Räume dieser Kongruenz einen Büschel. Für jeden polaren Raum dieses Büschels sind nach 9. auch die polaren Räume des durch jene zwei polaren Räume gehenden Büschels polarinvariant, folglich ergibt sich:

> Ein Büschel primärer polarer Räume einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 ist einem zweiten Büschel primärer polarer Räume von C_1^1 derart zugeordnet, daß die polaren Räume des einen Büschels für die polaren Räume des anderen polarinvariant sind.

Je drei zu einem Gebüsche polarer Räume gehörige Bündel haben einen polaren Raum gemein, folglich gibt es nur einen primären polaren Raum von C_1^1, der für drei zu keinem Büschel gehörige primäre polare Räume und folglich für alle polaren Räume des durch sie hindurchgehenden Bündels primärer polarer Räume von C_1^1 polarinvariant ist.

11. Sind R_1^2 und R_2^2 füreinander polarinvariante Regelflächen 2. Grades, welche bzw. die Regelscharen 2. Ordnung $\mathfrak{R}_1^2$, $\mathfrak{R}_2^2$ einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 enthalten, so trennen je zwei für R_1^2 zueinander polare Strahlen von $\mathfrak{R}_2^2$ je zwei durch C_1^1 einander zugeordnete Leitstrahlen von R_1^2 harmonisch. Je zwei durch C_1^1 einander zugeordnete Strahlen einer Regelschar 2. Ordnung $\mathfrak{R}_1^2$ dieser Kongruenz erweisen sich sonach als reziproke Polaren für alle Flächen 2. Ordnung, welche für die durch $\mathfrak{R}_1^2$ gehende Fläche 2. Ordnung polarinvariant sind und je eine Regelschar 2. Ordnung von C_1^1 enthalten. Alle je eine Regelschar 2. Ordnung von C_1^1 enthaltenden Regelflächen 2. Grades sind nun Inzidenzflächen primärer polarer Räume von C_1^1, und je zwei solcher polaren Räume, welche für einen primären polaren Raum von C_1^1 polarinvariant sind, bestimmen nach 9. einen Büschel solcher primären polaren Räume. Sonach läßt sich leicht schließen:

> Die durch eine lineare Strahlenkongruenz C_1^1 einander zugeordneten Leitstrahlen einer in ihr enthaltenen Regelschar 2. Ordnung $\mathfrak{R}^2$ sind reziproke Polaren in allen primären polaren Räumen von C_1^1, welche für die durch $\mathfrak{R}^2$ gehende Regelfläche 2. Grades polarinvariant sind.

12. Gehören vier windschiefe Geraden a, b, c, d nicht derselben Regelschar 2. Ordnung an, so sind a, b und c, d und ferner paarweise alle übrigen

Strahlen der durch a, b, c, d gehenden linearen Strahlenkongruenz C_1^1 reziproke Polaren für ∞^1 polare Räume*). Die Polarebenen eines beliebigen Punktes in diesen polaren Räumen bilden einen Ebenenbüschel 1. Ordnung, folglich bilden die polaren Räume selbst einen Büschel polarer Räume. Diese polaren Räume sind nach 8. sekundäre polare Räume für C_1^1, somit ist bewiesen:

> Bestimmen vier windschiefe Geraden a, b, c, d eine lineare Strahlenkongruenz C_1^1, so sind a, b und c, d und ferner paarweise alle übrigen Strahlen von C_1^1 reziproke Polaren in den polaren Räumen eines Büschels sekundärer polarer Räume von C_1^1. Durch einen sekundären polaren Raum von C_1^1 geht ein Büschel sekundärer polarer Räume dieser Kongruenz, welche in C_1^1 dieselbe polare Paarung wie jener polare Raum hervorrufen. Eine lineare Strahlenkongruenz hat ∞^5 sekundäre polare Räume.

Ein Büschel primärer polarer Räume von C_1^1 ist nach 10. einem anderen Büschel solcher polaren Räume derart zugeordnet, daß jeder polare Raum des einen Büschels für alle polaren Räume des anderen polarinvariant ist. Nun sind nach 11. je zwei durch C_1^1 einander zugeordnete Strahlen an einer Inzidenzfläche eines polaren Raumes des einen Büschels reziproke Polaren in allen polaren Räumen des anderen, und ferner geht durch einen beliebigen Punkt des Raumes je eine Inzidenzfläche des Büschels. Folglich ergibt sich aus dem vorstehenden Hauptsatze beiläufig:

> Gehen die Flächen eines F^2 Büschels durch Regelscharen 2. Ordnung einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1, so bilden die C_1^1 nicht angehörigen Regelscharen dieser Flächen eine zweite lineare Strahlenkongruenz.

13. Ein polarer Raum ist ein sekundärer polarer Raum einer hyperbolischen linearen Strahlenkongruenz, sobald in ihm die Leitgeraden u, v der Kongruenz zueinander polar sind**). Als Inzidenzflächen sekundärer polarer Räume einer hyperbolischen linearen Strahlenkongruenz können also alle allgemeinen Flächen 2. Grades auftreten, gleichgültig, ob sie reell sind oder

*) *Reye*, Geometrie der Lage, zweite Abteilung, dritte Auflage, Leipzig 1892, Nr. 57, S. 274.

**) *Reye*, Geometrie der Lage, zweite Abteilung, erste Auflage, Hannover 1868, S. 115.

nicht. Alle sekundären polaren Räume einer hyperbolischen linearen Strahlenkongruenz, welche die Strahlen der Kongruenz in gleicher Weise polar paaren und also nach 12. einen Büschel bilden, bestimmen auf den Leitgeraden u, v dieselben Involutionen konjugierter Punkte. Diese Punktinvolutionen sind entweder beide hyperbolisch oder beide elliptisch, oder die eine ist hyperbolisch und die andere elliptisch. Sonach gilt:

Die Inzidenzflächen der sekundären polaren Räume, welche die Strahlen einer hyperbolischen linearen Strahlenkongruenz in gleicher Weise polar paaren, bilden einen F^2 Büschel. Seine Grundkurve ist ein von Kongruenzstrahlen begrenztes einfaches Raumvierseit, dessen Seiten entweder alle vier reell oder zwei Paar konjugiert imaginärer Geraden erster oder zweiter Art sind.

14. Eine Regelfläche 2. Grades ist nur dann die Inzidenzfläche eines sekundären polaren Raumes einer elliptischen linearen Strahlenkongruenz, wenn ihre eine Regelschar durch die Kongruenz elliptisch, die andere hyperbolisch gepaart wird und also zwei reelle Kongruenzstrahlen enthält*). Eine nicht geradlinige Fläche 2. Grades kann nach Herrn *Reye* überhaupt nicht die Inzidenzfläche eines sekundären polaren Raumes einer elliptischen linearen Strahlenkongruenz sein**). Da nun jeder Büschel polarer Räume ∞^1 polare Räume mit reellen Inzidenzflächen enthält, und jeder sekundäre polare Raum nach 12. einen Büschel solcher polaren Räume bestimmt, welche dieselbe polare Zuordnung wie er hervorrufen, so gehen die Inzidenzflächen eines derartigen Büschels sekundärer polarer Räume bei einer elliptischen linearen Strahlenkongruenz durch zwei reelle Kongruenzstrahlen. Kurz:

Die Inzidenzflächen der sekundären polaren Räume einer elliptischen linearen Strahlenkongruenz sind stets reelle Regelflächen 2. Grades, deren eine Regelschar durch die Kongruenz hyperbolisch involutorisch, deren andere durch sie elliptisch involutorisch gepaart wird.

15. Ein Büschel sekundärer polarer Räume, welche eine elliptische lineare Strahlenkongruenz in gleicher Weise polar paaren, enthält nach 14.

*) *v. Staudt*, Beiträge zur Geometrie der Lage, erstes Heft, Nürnberg 1856, Nr. 102.

**) Der von mir gegebene Beweis des Satzes (*Reye*, Geometrie der Lage, zweite Abteilung, vierte Auflage, Stuttgart 1907, S. 86) läßt ohne weiteres erkennen, daß überhaupt eine überall konvexe Fläche niemals durch eine elliptische lineare Strahlenkongruenz in sich selbst übergeführt wird oder, wie ich mich kurz ausdrücken will, niemals für eine elliptische lineare Strahlenkongruenz geschartinvariant sein kann.

nur polare Räume, deren Inzidenzflächen nicht mehr als zwei reelle Kongruenzstrahlen enthalten, und zwar liegen diese auf allen Inzidenzflächen. Hätten diese Inzidenzflächen noch zwei andere reelle Geraden gemein, so wären diese durch die Kongruenz einander zugeordnet. Dann enthielte aber der von diesen Inzidenzflächen gebildete F^2 Büschel auch die Inzidenzfläche eines primären polaren Raumes, und das ist nach 13. ausgeschlossen. Also:

Die Inzidenzflächen der sekundären polaren Räume, welche eine elliptische lineare Strahlenkongruenz in gleicher Weise polar paaren, bilden einen F^2 Büschel, dessen Elemente außer zwei reellen Kongruenzstrahlen keine weiteren reellen Geraden gemein haben.

Mit Rücksicht auf den in 12. gefundenen Hauptsatz folgt hieraus beiläufig:

Sind vier zueinander windschiefe Geraden a, b, c, d nur mit zwei konjugiert imaginären Geraden inzident, und sind a, b und c, d reziproke Polaren eines polaren Raumes, so ist seine Inzidenzfläche stets eine Regelfläche 2. Grades.

16. Durch einen sekundären polaren Raum einer elliptischen linearen Strahlenkongruenz geht nach 12. ein Büschel sekundärer polarer Räume, welche die Strahlen der Kongruenz in gleicher Weise wie er polar paaren. Jede Inzidenzfläche eines solchen polaren Raumes schneidet einen beliebigen Strahl s der Kongruenz in je zwei durch die Kongruenz einander zugeordneten Punkten. Nun bilden je zwei einander zugeordnete Punkte von s ein Punktepaar einer elliptischen Punktinvolution, folglich schneiden alle Inzidenzflächen jenes Büschels s in reellen Punkten, d. h.:

Paart eine elliptische lineare Strahlenkongruenz beide Regelscharen einer Regelfläche 2. Grades involutorisch, so schneidet jeder Kongruenzstrahl diese Fläche in einem Paar reeller durch die Kongruenz einander zugeordneter Punkte. Die Inzidenzflächen zweier sekundären polaren Räume einer elliptischen linearen Strahlenkongruenz haben stets auch eine reelle Schnittkurve miteinander gemein.

17. Durch die Inzidenzflächen zweier sekundären polaren Räume einer elliptischen linearen Strahlenkongruenz geht ein F^2 Büschel, dessen Flächen die Kongruenzstrahlen — wie aus 16. ohne weiteres folgt — in je zwei reellen Punkten schneiden, die durch die Kongruenz einander zugeordnet sind. Somit erweisen sich alle Flächen dieses F^2 Büschels als

Inzidenzflächen sekundärer polarer Räume der elliptischen linearen Strahlenkongruenz. Durch zwei sekundäre polare Räume einer elliptischen linearen Strahlenkongruenz geht also ein Büschel solcher sekundären polaren Räume. Der gleiche Satz gilt auch für die hyperbolische lineare Strahlenkongruenz, da ihre Leitgeraden u, v in allen sekundären polaren Räumen der Kongruenz und nur in diesen polaren Räumen polar zueinander sind. Demnach gilt ganz allgemein:

Durch zwei sekundäre polare Räume einer linearen Strahlenkongruenz geht ein Büschel solcher polaren Räume.

18. Paart eine lineare Strahlenkongruenz C_1^1 die beiden Regelscharen $\mathfrak{R}_S^2, \mathfrak{L}_S^2$ einer Regelfläche 2. Ordnung S^2 involutorisch, so sind je zwei zugeordnete Strahlen einer Regelschar — etwa r_S, r'_S von $\mathfrak{R}_S^2$ — die Achsen zweier projektiven Ebenenbüschel, deren homologe Ebenen ebenfalls C_1^1 einander zuordnet. Beide projektiven Ebenenbüschel erzeugen eine Regelschar 2. Ordnung $\mathfrak{R}_R^2$ von C_1^1. Sie geht, wenn $\mathfrak{L}_S^2$ durch C_1^1 hyperbolisch involutorisch gepaart ist, durch die beiden dann zu $\mathfrak{L}_S^2$ gehörigen reellen Kongruenzstrahlen und hat, wenn die Kongruenz $\mathfrak{L}_S^2$ elliptisch involutorisch paart, außer r_S, r'_S mit S^2 keine weiteren reellen Strahlen gemein.

Die Polare eines Strahles x von C_1^1 für S^2 ist ein Kongruenzstrahl y. Ist x mit den Geraden r_S, r'_S von S^2 inzident, so ist es auch y, folglich erweist sich die Regelschar $\mathfrak{R}_R^2$ von C_1^1 und demnach auch die sie enthaltende Fläche R^2 für S^2 als polarinvariant. Je zwei durch C_1^1 einander zugeordnete Strahlen der Leitschar $\mathfrak{L}_R^2$ von $\mathfrak{R}_R^2$ haben, da die durch C_1^1 einander zugeordneten Strahlen r_S, r'_S auf R^2 liegen, zu Polaren für S^2 je zwei durch C_1^1 einander zugeordnete Strahlen von $\mathfrak{L}_R^2$. Für die Fläche R^2 ist umgekehrt die Fläche S^2 polarinvariant. Die für S^2 zueinander polaren Strahlen x, y von $\mathfrak{R}_R^2$ bilden mit den gemeinsamen Strahlen r_S, r'_S der Regelscharen $\mathfrak{R}_S^2$ und $\mathfrak{L}_R^2$ ein einfaches Raumvierseit, dessen Diagonalen l_S, l'_S durch C_1^1 einander zugeordnete Strahlen von $\mathfrak{L}_S^2$ sind. l_S, l'_S und ebenso je zwei andere durch C_1^1 einander zugeordnete Strahlen von $\mathfrak{L}_S^2$ sind somit reziproke Polaren für R^2. Hingegen haben, wie sich ohne weiteres ergibt, je zwei durch C_1^1 einander zugeordnete Strahlen von $\mathfrak{R}_S^2$ zu Polaren für R^2 wiederum je zwei durch C_1^1 einander zugeordnete Strahlen dieser Regelschar. Somit ist bewiesen:

Liegen zwei durch eine lineare Strahlenkongruenz C_1^1 einander zugeordnete Strahlen r_S, r'_S sowohl auf einer Regelfläche 2. Grades S^2, deren beide Regelscharen durch C_1^1 involutorisch gepaart sind, wie

auch auf einer Regelfläche 2. Grades R^2, die eine Regelschar 2. Ordnung von C_1^1 enthält, so sind beide Flächen füreinander polarinvariant. Je zwei durch C_1^1 einander zugeordnete Strahlen der einen Fläche, die zur selben Regelschar wie r_s, r'_s gehören, haben zu Polaren für die andere je zwei durch C_1^1 einander zugeordnete Strahlen dieser Regelschar. Hingegen sind je zwei durch C_1^1 einander zugeordnete mit r_s, r'_s inzidente Strahlen von S^2 selbst reziproke Polaren für R^2.

19. Je zwei durch eine lineare Strahlenkongruenz C_1^1 einander zugeordnete Geraden r, r' einer Regelfläche 2. Grades S^2, deren Strahlen durch C_1^1 involutorisch gepaart sind, gehören stets auch zu einer Regelfläche 2. Grades R^2, die eine Regelschar 2. Ordnung von C_1^1 enthält. Für R^2 sind sowohl die Strahlen von C_1^1 paarweise zueinander polar wie auch nach 18. je zwei mit r, r' inzidente durch C_1^1 einander zugeordnete Strahlen von S^2. Folglich ist jede Regelfläche 2. Grades, die durch eine Regelschar 2. Ordnung von C_1^1 geht und je zwei durch C_1^1 einander zugeordnete mit r, r' inzidente Strahlen von S^2 enthält, für R^2 polarinvariant. Was für R^2 gilt, gilt für jede andere Regelfläche 2. Grades, die durch eine Regelschar 2. Ordnung von C_1^1 geht und zwei Strahlen von S^2 enthält, die zur nämlichen Regelschar dieser Fläche wie r, r' gehören, demnach folgt mit Rücksicht auf 9.:

Alle Flächen, welche je eine Regelschar 2. Ordnung von C_1^1 enthalten und außerdem die nämliche Regelschar $\mathfrak{R}_S^2$ einer geradlinigen Inzidenzfläche S^2 eines sekundären polaren Raumes von C_1^1 in je zwei Strahlen schneiden, gehören einem F^2 Büschel an. Seine Grundkurve besteht aus den Leitgeraden von C_1^1 und aus den zur Leitschar von $\mathfrak{R}_S^2$ gehörigen Kongruenzstrahlen. Die polaren Räume der durch die beiden Regelscharen von S^2 bestimmten Büschel primärer polarer Räume von C_1^1 sind wechselseitig füreinander polarinvariant.

Ist S^2 insbesondere das Fokalparaboloid einer linearen Strahlenkongruenz, so gehen die durch die beiden Regelscharen von S^2 bestimmten Büschel primärer polarer Räume in die mit den beiden Fokalregelscharen bzw. verbundenen Büschel über*).

20. Sind die beiden Regelscharen einer Regelfläche 2. Grades durch eine lineare Strahlenkongruenz C_1^1 involutorisch gepaart, so sind nach 18.

---

*) *Jolles*, Die Fokaltheorie der linearen Strahlenkongruenzen, Math. Annalen, Bd. 53, S. 337.

die Strahlenpaare der einen Involution reziproke Polaren für alle Regelflächen zweiten Grades, welche je ein Strahlenpaar der anderen Involution und je eine Regelschar 2. Ordnung von C_1^1 enthalten. Die durch eine Regelschar von S^2 bestimmten durch eine Regelschar von C_1^1 gehenden Regelflächen 2. Grades gehören aber nach 19. einem F^2 Büschel an, folglich gilt:

Eine Regelfläche 2. Grades S^2, deren beide Regelscharen durch eine lineare Strahlenkongruenz C_1^1 involutorisch gepaart werden, ist polarinvariant für jeden polaren Raum der beiden Büschel primärer polarer Räume, welche bzw. die Regelscharen von S^2 bestimmen (19.). Die durch C_1^1 einander zugeordneten Strahlen der einen Regelschar sind reziproke Polaren für die durch die andere Regelschar bestimmten primären polaren Räume.

21. Durch den polaren Raum Σ^2 einer Regelfläche 2. Grades, deren Regelscharen $\mathfrak{R}_S^2, \mathfrak{L}_S^2$ durch eine lineare Strahlenkongruenz C_1^1 involutorisch gepaart werden, geht nach 12. ein Büschel $[\Sigma^2]$ sekundärer polarer Räume, welche die Strahlen von C_1^1 in der nämlichen Weise polar paaren wie Σ^2. Nun sind irgend zwei durch je eine Regelschar 2. Ordnung von C_1^1 und durch je zwei Strahlen von $\mathfrak{R}_S^2$ gehende Regelflächen 2. Grades nach 18. polarinvariant für Σ^2 und folglich auch für die polaren Räume von $[\Sigma^2]$. Ferner bilden die für jene beiden Regelflächen polarinvarianten primären polaren Räume nach 19. den durch die Regelschar $\mathfrak{L}_S^2$ bestimmten Büschel primärer polarer Räume. Folglich sind die polaren Räume dieses Büschels polarinvariant für die des Büschels $[\Sigma^2]$, d. h.:

Eine Regelfläche 2. Grades S^2, deren Regelscharen $\mathfrak{R}_S^2, \mathfrak{L}_S^2$ durch eine lineare Strahlenkongruenz C_1^1 involutorisch gepaart sind, bestimmt zwei Büschel primärer und ein Büschel sekundärer polarer Räume von C_1^1. Die polaren Räume jedes dieser Büschel sind polarinvariant für die polaren Räume der beiden anderen. ∞^1 Inzidenzflächen des einen Büschels primärer polarer Räume gehen bzw. durch je zwei Strahlen von $\mathfrak{R}_S^2$; ∞^1 Inzidenzflächen des anderen bzw. durch je zwei Strahlen von $\mathfrak{L}_S^2$ (19.). Endlich rufen alle polaren Räume des Büschels sekundärer polarer Räume unter den Strahlen von C_1^1 dieselbe polare Paarung hervor (12.).

Halensee, den 21. März 1907.

Elementare Irreduzibilitätsuntersuchungen.

Von Herrn *Michael Bauer* in Budapest.

In einer unlängst erschienenen Arbeit habe ich eine einfache idealtheoretische Deutung der *Puiseux*schen Zahlen gegeben. Aus dieser Deutung folgt unter anderem auch ein Irreduzibilitätssatz. Nun soll in dieser Arbeit der a. a. O. explizit*) angegebene Satz mit den einfachsten Mitteln, ohne Anwendung der Idealtheorie und unabhängig von der geometrischen Anschauung bewiesen werden**).

§ 1.

1. Wir werden die folgende Aufgabe als die *Puiseux*sche bezeichnen. Es seien

$$r_1, r_2, \ldots r_n$$

nicht negative rationale Zahlen; der Wert T ist so zu bestimmen, daß die Reihe

$$\text{(I.)} \qquad nT,\; r_1+(n-1)T, \ldots r_k+(n-k)T, \ldots r_n$$

mindestens *zwei kleinste* Zahlen aufweisen soll.

2. Zur Lösung dieser Aufgabe werden wir fürs erste ein eindeutiges Verfahren angeben, durch welches die positiven ganzen Zahlen

*) Dieses Journal Bd. 132, S. 28. Für *ganzzahlige* Gleichungen erlaubt die Idealtheorie den Satz sofort zu verallgemeinern; indem man z. B. an Stelle von z eine beliebige irreduzible Form $(mod\ p)$ setzt. Vgl. hierzu noch dieses Journal Bd. 128, S. 87. Wir wollen hierauf jetzt nicht weiter eingehen.

**) Man vgl. die Abhandlung von *G. Dumas*, Sur quelques cas d'irréductibilité des polynômes à coefficients rationnels. Journal de Mathématiques, 6. Serie, Bd. II, S. 191—258, in erster Linie den § 3 (S. 212) der genannten Abhandlung.

$$k_1, k_2, \dots k_i, \dots k_s; \quad \Sigma k_i = n$$

und die nicht negativen rationalen Zahlen α_i in der Weise festgelegt werden, daß sie die Relationen

$$(1.) \qquad \begin{aligned} r_{k_1+k_2+\dots+k_i} &= \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_i, \\ r_{k_1+k_2+\dots+k_{i-1}+l} &\geqq \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{i-1} + l\frac{\alpha_i}{k_i} \end{aligned}$$

erfüllen und außerdem noch

$$(2.) \qquad \frac{\alpha_1}{k_1} < \frac{\alpha_2}{k_2} < \dots < \frac{\alpha_s}{k_s}$$

ausfällt. Man wähle vorerst unter den Brüchen

$$\frac{r_t}{t}$$

den kleinsten aus, für welchen noch t möglichst groß ist. So bekommt man z. B.

$$t = k_1, \quad r_{k_1} = \alpha_{k_1},$$

und es bestehen die Relationen

$$(3.) \qquad \frac{r_t}{t} \geqq \frac{\alpha_1}{k_1}, \quad t < k_1;$$

$$(3^*.) \qquad \frac{r_t}{t} > \frac{\alpha_1}{k_1}, \quad t > k_1,$$

woraus

$$(4.) \qquad r_t \geqq t\frac{\alpha_1}{k_1}$$

folgt. Man wähle jetzt unter den Brüchen

$$\frac{r_{k_1+t} - r_{k_1}}{t}$$

den kleinsten aus, für welchen noch t möglichst groß ist. So bekommt man z. B.

$$t = k_2, \quad r_{k_1+k_2} - r_{k_1} = \alpha_2,$$

und es bestehen die Relationen

$$(5.) \qquad \frac{r_{k_1+t} - r_{k_1}}{t} \geqq \frac{\alpha_2}{k_2}, \quad t \leqq k_2,$$

$$(5^*.) \qquad \frac{r_{k_1+t} - r_{k_1}}{t} > \frac{\alpha_2}{k_2}, \quad t > k_2,$$

woraus

$$(6.) \qquad r_{k_1+t} \geqq \alpha_1 + t\frac{\alpha_2}{k_2}$$

folgt. Da nach $(3^*.)$

$$\frac{r_{k_1+k_2}}{k_1+k_2} > \frac{\alpha_1}{k_1}$$

ist, ergeben sich noch die Relationen

$$\alpha_1 + \alpha_2 > (k_1+k_2)\frac{\alpha_1}{k_1}, \quad \frac{\alpha_1}{k_1} < \frac{\alpha_2}{k_2}.$$

In der angegebenen Weise fortfahrend, verifiziert man leicht die Relationen (1.) und (2.).

3. Nun werden wir beweisen können, daß *die Werte* (2.) *die Lösungen der Puiseuxschen Aufgabe liefern.* Fürs erste ist jede Lösung numerisch nicht kleiner als $\frac{\alpha_1}{k_1}$. Denn ist die Zahl T eine Lösung, so existiert ein Index v, für welchen

$$nT \geqq r_v + (n-v)T$$

ausfällt, und so folgt nach $(3.^*)$

$$vT \geqq r_v \geqq v\frac{\alpha_1}{k_1}, \quad T \geqq \frac{\alpha_1}{k_1}.$$

Setzen wir nun

$$T = \frac{\alpha_1}{k_1} + \bar{T}, \quad (\bar{T} \geqq 0)$$

so bestehen für die ersten k_1 Glieder der Reihe (I.) folgende Relationen:

$$(\mathrm{I}^*.)\qquad \begin{cases} n\left(\frac{\alpha_1}{k_1}+\overline{T}\right)=n\frac{\alpha_1}{k_1}+T, \\ r_1+(n-1)\left(\frac{\alpha_1}{k_1}+\overline{T}\right)\geqq n\frac{\alpha_1}{k_1}+(n-1)T, \\ r_2+(n-2)\left(\frac{\alpha_1}{k_1}+\overline{T}\right)\geqq n\frac{\alpha_1}{k_1}+(n-2)T, \\ \quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ r_{k_1}+(n-k_1)\left(\frac{\alpha_1}{k_1}+\overline{T}\right)=n\frac{\alpha_1}{k_1}+(n-k_1)\,T. \end{cases}$$

Falls $\overline{T}=0$ ist, wird in der Tabelle (I*.) das erste und letzte Element gleich groß, die übrigen sind numerisch nicht kleiner, folglich genügt

$$T=\frac{\alpha_1}{k_1}$$

wirklich der Aufgabe*). Nehmen wir $\overline{T}>0$ an, so nimmt in (I*.) das letzte Element den einzigen kleinsten Wert an; infolgedessen sind die Lösungen unserer Aufgabe, welche numerisch größer sind als $\frac{\alpha_1}{k_1}$, identisch mit den Lösungen, welche die zu der Reihe

$$(\mathrm{II.})\qquad \begin{gathered} NT,\quad \overline{r}_1+(N-1)\,T,\ldots,\quad \overline{r}_N, \\ N=n-k_1,\quad \overline{r}_i=r_{k_1+i}-r_{k_1} \end{gathered}$$

gehörige *Puiseux*sche Aufgabe besitzt. Wenn man diese Reihe auf die unter 2. angegebene Weise behandelt, so kommt man zu den Zahlen

$$\frac{\alpha_2}{k_2},\ldots,\quad \frac{\alpha_s}{k_s}$$

deren Anzahl um Eins kleiner ist, als die Anzahl der Elemente (2.). Hieraus folgt durch eine vollständige Induktion, daß die Werte (2.) tatsächlich die Lösungen der behandelten Aufgabe liefern.

§ 2.

1. Es sei die ganzzahlige Gleichung

$$(\mathrm{I.})\qquad z^n+c_1z^{n-1}+\cdots\quad +c_n=0$$

* Es ist nämlich nach (1.) und (2.) noch

$$r_{k_1+t}+(n-k_1-t)\frac{\alpha_1}{k_1}\geqq \alpha_1+t\frac{\alpha_2}{k_2}+(n-k_1-t)\frac{\alpha_1}{k_1}>n\frac{\alpha_1}{k_1}.$$

gegeben*). Es seien ferner die Ordnungen der Koeffizienten in bezug auf die Primzahl p gleich den Zahlen**):

$$r_0 = 0,$$

$$(\mathrm{I}^*.) \qquad r_1, \dots r_k, \dots r_n.$$

Wie wir in § 1 sahen, erfüllen die Zahlen (I*.) gewisse Relationen, welche dort als Relationen (1.) und (2.) auftraten. Wir wollen die Zahlen

$$(2.) \qquad \frac{\alpha_1}{k_1}, \quad \frac{\alpha_2}{k_2}, \dots \frac{\alpha_i}{k_i}, \dots \frac{\alpha_s}{k_s},$$

welche die Lösungen der durch die Reihe

$$(3.) \qquad nT, \quad r_1 + (n-1)T, \dots r_k + (n-k)T, \dots r_n$$

gegebenen *Puiseux*schen Aufgabe liefern, als *Puiseux*sche Zahlen der Gleichung (bzw. des Polynoms) bezeichnen. Jeden Wert aber, der numerisch gleich einer *Puiseux*schen Zahl ist, nennen wir einen *Puiseux*schen Wert.

2. *Die Puiseuxschen Werte des Produktes bestehen aus der Gesamtheit der Puiseuxschen Werte der Faktoren.*

Es sei das Polynom

$$(4.) \quad z^{n+m} + a_1 z^{n+m-1} + \cdots = (z^n + c_1 z^{n-1} + \cdots)(z^m + C_1 z^{m-1} + \cdots)$$

gegeben, die Ordnungen der Koeffizienten sollen bzw. durch die mit Indizes versehenen Buchstaben S, r, R bezeichnet werden. Es ist vorerst

$$(4^*.) \qquad S_k \underset{(i+l=k)}{\geqq} r_i + R_l.$$

Um den Beweis zu leisten, muß man verschiedene Fälle unterscheiden.

3. Es sei die Zahl T für keinen der Faktoren ein *Puiseux*scher Wert. Infolgedessen besitzt jede der Reihen

*) Nur der Bequemlichkeit halber sind hier die Koeffizienten als Größen des holoiden Bereiches [1] angenommen worden.

**) Ist ein Koeffizient gleich Null, so bleibt die zugehörige Ordnung einfach unberücksichtigt; ein Umstand, welcher auf die Behandlung der *Puiseux*schen Aufgabe gar keinen Einfluß ausübt. Wir können und wollen $c_n \neq 0$ annehmen.

(5.) $$nT, \quad r_1+(n-1)T, \dots r_n;$$

(5*.) $$mT, \quad R_1+(m-1)T, \dots R_m$$

eine einzige kleinste Zahl. Es seien diese z. B.

$$r_i+(n-i)T, \quad R_l+(m-l)T.$$

Da noch identisch

$$r_f+R_g+(n+m-(i+l))T = \underset{(f+g=i+l)}{r_f+(n-f)T+R_g+(m-g)T}$$

ist, so folgt aus unserer Annahme, daß unter den Zahlen

$$\underset{(f+g=i+l)}{r_f+R_g}$$

die einzige numerisch kleinste die Zahl

$$r_i+R_l$$

ist, woraus sich

$$S_{i+l}=r_i+R_l$$

ergibt, und so bildet die Zahl

$$S_{i+l}+(n+m-(i+l))T$$

das einzige numerisch kleinste Element der Reihe

(6.) $$(n+m)T, \quad S_1+(n+m-1)T, \dots S_{n+m}.$$

Infolgedessen ist T kein *Puiseux*scher Wert.

4. Es sei die Zahl T für einen der Faktoren, z. B. für den ersten, ein *Puiseux*scher Wert. Die Reihe (5.) besitzt in diesem Falle mindestens zwei kleinste Zahlen. Es seien unter diesen die erste und die letzte die Zahlen

$$r_i+(n-i)T, \quad r_j+(n-j)T.$$

Die Reihe (5*.) besitzt eine einzige numerisch kleinste Zahl, es soll diese die Zahl

$$R_l + (m-l)T$$

sein. Aus diesen Prämissen folgen die Relationen

$$S_{i+l} = r_i + R_l, \quad S_{j+l} = r_j + R_l,$$

woraus man sieht, daß sämtliche Zahlen der Reihe (6.) nicht kleiner ausfallen, als die beiden einander gleichen Zahlen

$$S_{i+l} - (n+m-(i+l))T, \; S_{j+l} - (n+m-(j+l))T.$$

Infolgedessen ist T ein *Puiseux*scher Wert für das Produkt.

5. Die Zahl T soll für beide Faktoren ein *Puiseux*scher Wert sein. Die Reihen (5.), (5*.) besitzen in diesem Falle beide mindestens zwei kleinste Zahlen. Es sollen die ersten und die letzten der betreffenden Zahlen die Zahlen

$$r_i + (n-i)T, \quad r_j + (n-j)T$$

bzw.

$$R_l + (m-l)T, \quad R_q + (m-q)T$$

sein. Infolgedessen bestehen die Relationen

$$S_{i+l} = r_i + R_l, \quad S_{j+q} = r_j + R_q,$$

aus welchen evident ist, daß sämtliche Zahlen der Reihe (6.) nicht kleiner ausfallen, als die beiden einander gleichen Zahlen

$$S_{i+l} - (n+m-(i+l))T, \quad S_{j+q} - (n+m-(j+q))T.$$

Folglich ist die Zahl T ein *Puiseux*scher Wert des Produktes, womit der Satz bewiesen ist*).

§ 3.

Aus der Behandlung der *Puiseux*schen Aufgabe und aus dem eben bewiesenen Satze ersieht man sofort die Richtigkeit des folgenden Satzes.

Wenn die Puiseuxschen Zahlen der Gleichung

$$z^n + c_1 z^{n-1} + \cdots + c_n = 0$$

*) Man beachte, daß der Beweis unabhängig von § 1 ist.

in bezug auf eine Primzahl durch die Reihe

$$\frac{\alpha_1}{k_1}, \frac{\alpha_2}{k_2}, \dots \frac{\alpha_i}{k_i}, \dots \frac{\alpha_s}{k_s}$$

geliefert werden und außerdem noch

$$(\alpha_i, k_i) = 1 \quad (i = 1, 2, \dots s)$$

ausfällt, so sind die Grade der irreduziblen Faktoren von der Gestalt:

$$n_{i_1 i_2 \dots i_\varrho} = k_{i_1} + k_{i_2} + \dots + k_{i_\varrho}.$$

Es ist ferner

$$n = \sum_{i_1 i_2 \dots i_\varrho} n_{i_1 i_2 \dots i_\varrho},$$

wo die Kombinationen

$$(K_\varrho) \qquad (i_1 i_2 \dots i_\varrho)$$

nur Zahlen aus der Reihe

$$(S) \qquad 1, 2, \dots s$$

enthalten, und zwar in solcher Weise, daß jede Zahl (S) einmal und nur einmal unter den Kombinationen (K_ϱ) auftritt.

Über die Bildung des Formensystems der ternären biquadratischen Form*).

Von Fräulein *Emmy Noether* in Erlangen.

Einleitung.

Mit dem Formensystem der ternären biquadratischen Form beschäftigen sich Arbeiten von *Gordan*, *Maisano* und *Pascal***). Herr *Gordan* stellt das vollständige, aus 54 Bildungen bestehende, Formensystem der speziellen automorphen Form: $f \equiv x_1^3 x_2 + x_2^3 x_3 + x_3^3 x_1$ unter Zugrundelegung ähnlicher Prinzipien auf, wie er sie für die Formensysteme im binären Gebiet gegeben hat.

Bei Herrn *Maisano* sind für die allgemeine biquadratische Form die Formen bis zur 5. Ordnung***) einschließlich aufgestellt, sowie einige Invarianten, Kovarianten und Kontravarianten höherer Ordnung, nach der von Herrn *Gordan* in Band I der Math. Annalen für die ternäre kubische Form angewandten Methode. Herr *Pascal* beschäftigt sich, unter Benutzung

*) Ein kurzer Auszug aus Einleitung und Kapitel I ist in den „Sitzungsber. der phys.-med. Sozietät Erlangen 1907", S. 176 bis 179, erschienen.

**) *P. Gordan*, über das volle Formensystem der ternären biquadratischen Form $f = x_1^3 x_2 + x_2^3 x_3 + x_3^3 x_1$. (Math. Annalen, Bd. XVII (1880), S. 217—233.)

G. Maisano, 1) Sistemi completi dei primi cinque gradi della forma ternaria biquadratica e degl' invarianti, covarianti e contravarianti di sesto grado. (Giorn. di Battaglini XIX.)

2) Sui covarianti indipendenti di 6° grado nei coefficienti della forma biquadratica ternaria. (Rend. Circ. Mat. di Palermo I, 1887.)

E. Pascal, Contributo alla teoria della forma ternaria biquadratica e delle sue varie decomposizioni in fattori. (Memoria premiata dalla R. Accademia delle scienze fisiche e matematiche di Napoli. 1905.)

***) Unter „Ordnung" soll die Dimension in den Koeffizienten, unter „Grad" die in den Variablen verstanden werden.

der *Maisano*schen Resultate, hauptsächlich mit der Frage nach dem Zerfallen der biquadratischen Form in Faktoren*).

*Das Ziel der folgenden Untersuchungen ist die Aufstellung des Formensystems für die allgemeine ternäre biquadratische Form; und zwar werden in dieser Arbeit nur die Hauptgrundlagen gegeben, ein sogenanntes „relativ vollständiges System“**) aufgestellt.*

Die Arbeit schließt sich eng an die *Gordan*sche Arbeit an; doch waren die dort nur ganz im allgemeinen gegebenen Prinzipien erst im einzelnen auszuarbeiten. Mit Hilfe eines Satzes über den Zusammenhang der Faltungen und durch Einführung der „Formenreihe“ (§ 1) werden die Reduktionssätze scharf formuliert und vervollständigt (§ 3), während die rekurrierende Aufstellung spezieller Reihenentwicklungen (§ 2) das rechnerische Mittel zur wirklichen Durchführung der Reduktionen gibt.

Der Grundgedanke der Systembildung ternärer Formen ist derselbe wie im binären Gebiet. Ausgehend von einem ersten relativ vollständigen System — dem System der aus dem Binären übernommenen Formen —, gelangt man nach bestimmter Gesetzmäßigkeit zu Systemen mit immer höherem Modul, solange bis das System eines Moduls — der Modul als Grundform genommen — endlich und bekannt wird, oder auch bis ein Modul sich reduzieren läßt auf Formen, die Invarianten zum Faktor haben. Durch Überschiebung des relativ vollständigen Systems über das System des Moduls entsteht im ersten Fall das absolut vollständige System, während im zweiten Fall relativ vollständiges und absolut vollständiges System identisch werden. Infolge der durch Herrn *Hilbert* allgemein bewiesenen Endlichkeit der Formensysteme muß dies Verfahren notwendig zu einem Abschluß führen.

In unserm Fall wird der Modul (abc) des ersten relativ vollständigen Systems (§ 4) zurückgeführt auf die Moduln $\Delta = (abc)^2 a_x^2 b_x^2 c_x^2$ und $\nu = (abu)^4$

*) In der zweiten kurzen Note versucht Herr *Maisano* eine lineare Abhängigkeit der drei Kovarianten 6. Ordnung und 6. Grades nachzuweisen. Im Gegensatz zu diesem nicht ganz vollständigen Beweis glaubt Herr *Pascal* die lineare Unabhängigkeit der drei Kovarianten 6. Ordnung, ebenso wie diejenige der drei Invarianten 9. Ordnung bewiesen zu haben. Daß aber in der Tat eine lineare Relation zwischen den drei Kovarianten einerseits, den drei Invarianten andererseits existiert, zeigen die Formeln (13), § 11 und (22), § 17 Anmerkung, der vorliegenden Arbeit, wo diese Relationen explizit gegeben sind. Nach einer Mitteilung des Herrn *Pascal* erklärt sich der Widerspruch durch einen numerischen Fehler im Ausdruck seiner Kontravariante p (hier ϱ genannt) S. 46 seiner Abhandlung.

**) Für die Bezeichnung vgl. § 3a.

(§ 5), und sodann das relativ vollständige System mod ν gefunden (§ 6). Diese Resultate sind schon in der *Gordan*schen Arbeit für die allgemeine biquadratische Form gegeben; unsere Art der Ableitung läßt sich jedoch leichter auf Formen höheren Grades übertragen.

Als Reihe der Moduln wählen wir nun die Formen (§ 7):

$$\nu, \quad \nu(\nu) = (\nu\nu_1 x)^4 = s_x^4, \quad \nu(s) = (ss'u)^4, \ldots .$$

Bei der Bildung des relativ vollständigen Systems mod s werden zwei im System auftretende quadratische Formen, u_ϱ^2 und t_x^2, als Moduln adjungiert (§ 9 und 10) und demzufolge das relativ vollständige System mod (s, ϱ, t) gebildet; es wird sodann gezeigt (§ 17), daß der Modul $(ss'u)^4$ reduzibel ist auf die Moduln ϱ und t. Dadurch geht das nächsthöhere System über in ein relativ vollständiges System mod (ϱ, t). Da aber das simultane System zweier quadratischen Formen endlich und bekannt ist, im allgemeinen Fall aus 20 Bildungen besteht*), ist mit der Aufstellung des relativ vollständigen Systems mod (ϱ, t) der oben gekennzeichnete Abschluß erreicht. Die Überschiebung dieses Systems über das System von (ϱ, t) zur Bildung des absolut vollständigen Systems bleibt vorbehalten.

Als relativ vollständiges System mod (ϱ, t) werden 331 Bildungen gefunden, die in der beigefügten Tabelle nach ihrem Grad in den Variablen x und u geordnet sind.

Zum Schluß geben wir noch eine Übersicht über die eingeführten Symbole:

$$f = a_x^4, \quad \theta = \theta_x^4 u_\vartheta^2 = (abu)^2 a_x^2 b_x^2, \quad K = K_x^6 u_k^3 = (a\theta u) u_\vartheta^2 a_x^3 \theta_x^3, \quad j = u_j^6 = (a\theta u)^4 u_\vartheta^2,$$

$$\Delta = \Delta_x^6 = a_\vartheta^2 a_x^2 \theta_x^4 = (abc)^2 a_x^2 b_x^2 c_x^2, \quad N = N_x^8 u_n = (a\Delta u) a_x^3 \Delta_x^5,$$

$$\nu = u_\nu^4 = (abu)^4, \quad H = H_x^2 u_\eta^4 = (\nu\nu_1 x)^2 u_\nu^2 u_{\nu_1}^2, \quad L = L_x^3 u_l^6 = (\nu\eta x) H_x^2 u_\nu^3 u_\eta^3,$$

$$g = g_x^6 = (\nu\eta x)^4 H_x^2, \quad \sigma = u_\sigma^6 = H_\nu^2 u_\nu^2 u_\eta^4,$$

$$s = s_x^4 = (\nu\nu_1 x)^4, \quad Z = Z_x^4 u_\zeta^2 = (ss'u)^2 s_x^2 s_x'^2,$$

$$\varrho = u_\varrho^2 = \theta_\nu^4 u_\vartheta^2, \quad t = t_x^2 = a_\eta^4 H_x^2,$$

$$i = a_\nu^4, \quad J = s_\nu^4.$$

---

*) Vgl. *Clebsch-Lindemann*, Vorlesungen über Geometrie. (Bd. I, S. 288 ff.). System zweier kogredienter Formen.

Gordan, Über Büschel von Kegelschnitten. (Math. Ann. Bd. XIX. S. 530). System zweier kontragredienter Formen.

Kapitel I. Allgemeine Sätze über ternäre Formen.

§ 1. *Faltungsprozeß. Formenreihen.*

Der Grundprozeß zur Erzeugung von Formen ist der *Faltungsprozeß*, der sich im ternären Gebiet folgendermaßen definieren läßt. Gegeben sei ein symbolisches Produkt:

$$s_x^m t_x^n u_\sigma^\mu u_\tau^\nu.$$

Ersetzt man die Faktorenpaare

	$s_x t_x$	$u_\sigma u_\tau$	$s_x u_\sigma$ oder $s_x u_\tau$	$t_x u_\tau$ oder $t_x u_\sigma$
bzw. durch	(stu)	$(\sigma\tau x)$	s_σ oder s_τ	t_τ oder t_σ
Faltung	I	II	III	IV,

so sind die entstehenden Formen durch Faltung aus der ursprünglichen hervorgegangen*).

Dabei läßt sich der Ausdruck $s_x^m t_x^n u_\sigma^\mu u_\tau^\nu$ entweder als wirkliches Produkt zweier Formen $S \cdot T$ auffassen, oder auch als einzige Form mit mehreren Reihen von Symbolen: $s_x^m t_x^n u_\sigma^\mu u_\sigma^\nu = A_x^{m+n} u_\lambda^{\mu+\nu}$. Im ersten Fall sprechen wir von der Faltung der Form S mit T, im zweiten Fall von der „Faltung der Form A in sich". Der Kürze halber nehmen wir im folgenden immer an (was in der Tat bei allen später zu betrachtenden Formen der Fall ist)

$$\text{(a)} \qquad \begin{aligned} s_\sigma^\lambda &= 0, \\ t_\tau^\varkappa &= 0 \end{aligned}$$

für beliebiges von 0 verschiedenes λ und $\varkappa$ und vereinigt mit beliebigen anderen Faltungen. Es sagt dies aus, daß die Form $s_x^m t_y^n u_\sigma^\mu v_\tau^\nu$ eine sogenannte „Normalform" ist, d. h. bei Anwendung des Ω-Prozesses, sowohl nach den Variablen x und u, wie nach den Variablen y und v, verschwindet.

*) *Gordan*, Math. Annalen Bd. XVII S. 219.

Die Bedingung (a) stellt also keine Einschränkung dar, sondern läßt sich stets erreichen*).

Für den Zusammenhang der einzelnen Faltungen gilt nun folgender Satz:

Satz I. *Die Faltungen* I *und* II *sind Grundfaltungen, aus denen sich, unabhängig von der Reihenfolge der Zusammensetzung, die Faltungen* III *und* IV *zusammensetzen lassen. In anderen Worten: Um alle aus einem gegebenen Ausdruck durch Faltung entstehenden Formen zu bilden, hat man nur die Faltung* I *und* II *anzuwenden.*

Beweis: Nach dem Identitätssatz, bzw. Produktsatz für Matrizen, folgt unter Berücksichtigung von (a):

$$(\widehat{st}\,\sigma x) = -t_\sigma, \qquad (\widehat{\sigma\tau}\,s u) = -s_\tau,$$

$$(\widehat{st}\,\tau x) = s_\tau, \qquad (\widehat{\sigma\tau}\,t u) = t_\sigma,$$

$$(s t u)(\sigma\tau x) = s_\tau + t_\sigma - u_x \cdot s_\tau\, t_\sigma.$$

Durch Zusammensetzung von Faltung I und II entstehen also Faltung III und IV, und zwar ebenso bei Anwendung von Faltung II auf Faltung I, d. h. auf die Faktoren $(stu)\,u_\sigma u_\tau$, wie bei Anwendung von Faltung I auf Faltung II, auf die Faktoren $(\sigma\tau x)\;s_x t_x$.

Als *Formenreihe***) definieren wir eine Anfangsform mit allen durch Faltung in sich aus dieser hervorgegangenen Formen und bezeichnen die Formenreihe durch die Anfangsform. Als „höhere Form" soll hierbei jede Form mit mehr Faltung in sich gelten, während unter den gleichberechtigten Faltungen s_τ und t_σ eine als höher normiert werden muß. Nach dem Bildungsgesetz der Formenreihe folgt:

1) Jede Form der Formenreihe ist linear in den Symbolen der Anfangsform.

---

*) Vgl. *Gordan*, Math. Annalen Bd. V S. 104.

**) Vgl. *Clebsch*, Über eine Fundamentalaufgabe der Invariantentheorie (Abh. der Gött. Ges. d. Wiss. Bd. XVII): § 17 und § 18 Schluß. Die „Formenreihe" unterscheidet sich von dem dort eingeführten „eigentlich reduzierten äquivalenten System" durch das Prinzip der Anordnung nach höheren Formen.

2) Die Formenreihe ist bei Anfangsformen mit je zwei Reihen kontragredienter Symbole eindeutig bestimmt; bei Anfangsformen mit mehr Symbolreihen ist sie eindeutig zu normieren durch Auszeichnung spezieller unter den durch den Identitätssatz verbundenen Faltungen.

Nach Satz I. läßt sich eine Formenreihe $s_x^m t_x^n u_\sigma^\mu u_\tau^\nu (m > n;\ \mu > \nu)$ nach folgendem rechteckigen Schema anordnen:

$s_x^m t_x^n u_\sigma^\mu u_\tau^\nu$	(stu)	$(stu)^2$	.	✱
$(\sigma\tau x)$	$t_\sigma,\ s_\tau$	$t_\sigma(stu),\ s_\tau(stu)$	.	.
$(\sigma\tau x)^2$	$t_\sigma(\sigma\tau x),\ s_\tau(\sigma\tau x)$	$t_\sigma^2,\ t_\sigma s_\tau,\ s_\tau^2$	.	
.	. .	. . .	.	.
$(\sigma\tau x)^\nu$	$t_\sigma(\sigma\tau x)^{\nu-1},\ s_\tau(\sigma\tau x)^{\nu-1}$	$t_\sigma^2(\sigma\tau x)^{\nu-2},\ t_\sigma s_\tau(\sigma\tau x)^{\nu-2},\ s_\tau^2(\sigma\tau x)^{\nu-2}$	.	.
.	$t_\sigma(\sigma\tau x)^\nu$	$t_\sigma^2(\sigma\tau x)^{\nu-1},\ t_\sigma s_\tau(\sigma\tau x)^{\nu-1}$	.	.
.	. .	$t_\sigma^2(\sigma\tau x)^\nu$	.	.

✱ *)		
$(stu)^n$	. .	.
$t_\sigma(stu)^{n-1},\ s_\tau(stu)^{n-1}$	$s_\tau(stu)^n$	.
$t_\sigma^2(stu)^{n-2},\ t_\sigma s_\tau(stu)^{n-2},\ s_\tau^2(stu)^{n-2}$	$t_\sigma s_\tau(stu)^{n-1},\ s_\tau^2(stu)^{n-1}$	$s_\tau^2(stu)^n$

Man erhält hier, wenn man

1) um eine Kolonne nach rechts fortschreitet, alle durch Faltung I aus den nebenstehenden Formen entstehenden Formen,

2) um eine Zeile nach unten fortschreitet, alle durch Faltung II aus den obenstehenden Formen entstehenden Formen,

und somit alle durch Faltung entstehenden Formen.

Eine beliebige Form der Gesamtformenreihe: $t_\sigma^\varkappa s_\tau^\lambda (stu)^\mu$ oder $t_\sigma^\varkappa s_\tau^\lambda (\sigma\tau x)^\nu$ bildet den Anfang einer neuen Formenreihe, die aus all denjenigen Formen des rechteckigen Schemas mit der Form $t_\sigma^\varkappa s_\tau^\lambda (stu)^\mu$ oder $t_\sigma^\varkappa s_\tau^\lambda (\sigma\tau x)^\nu$ als linkem oberem Eckpunkt besteht, die den Faktor $t_\sigma^\varkappa s_\tau^\lambda$ haben.

Nachbemerkung. Eine Ausnahme erleidet Satz I in dem Fall, wo die Zahlen n und μ (bzw. m und ν) gleich Null werden, Faltung I, II und IV also nicht mehr existieren, wohl aber Faltung III (bzw. IV). Als Formenreihe bezeichnen wir in diesem Fall das Diagonalglied des Schemas:

*) Hier, und ähnlich im folgenden, ist der mit ✱ bezeichnete unten stehende Teil an die ebenso bezeichnete rechts oben befindliche Stelle des Schemas anzusetzen.



In Übereinstimmung mit dem Fehlen von Faltung I und II reduziert sich in diesem Fall die Reihenentwicklung nach Polaren der Formenreihe stets auf das Anfangsglied; es gelten aber die Sätze über Reduzenten.

§ 2. *Reihenentwicklungen nach Polaren der Formenreihe**).

Für Formen mit n Variablen sind zwei Arten von Reihenentwicklungen explizit aufgestellt**):

1) für Formen mit je einer Reihe kontragredienter Variablen: $s_x^m u_\tau^\nu$ eine nach Potenzen von u_x fortschreitende Reihe, deren Koeffizienten „Normalformen" sind;

2) für Formen mit zwei Reihen kogredienter Variablen $s_x^m t_x^{n-\lambda} t_y^\lambda$ eine Entwicklung nach Polaren der Elementarkovarianten (Polaren der Formenreihe $s_x^m t_x^n$), die ternär folgendermaßen lautet:

$$\text{(I.)} \qquad s_x^m t_x^{n-\lambda} t_y^\lambda = \sum_\varrho \frac{\binom{m}{\varrho}\binom{\lambda}{\varrho}}{\binom{m+n-\varrho+1}{\varrho}} \cdot \left[(st\widehat{xy})^\varrho s_x^{m-\varrho} t_x^{n-\varrho}\right]_{y^{\lambda-\varrho}}.$$

Wir kombinieren beide Entwicklungen, indem wir für Formen mit je zwei Reihen kontragredienter Variablen:

$$s_x^m t_x^{n-\lambda} t_y^\lambda u_\sigma^\mu u_\tau^{\nu-\varkappa} v_\tau^\varkappa$$

*) Vgl. *Study*, Methoden zur Theorie der ternären Formen (Teubner 1889) II. § 7. Unsere Ableitung gibt im Unterschied von der dortigen die Methode zur raschen rechnerischen Bestimmung der numerischen Koeffizienten $C_{pr\varrho}$. Die *Clebsch-Study*sche Entwicklung würde bei Spezialisierung a), a') lauten:

$$(stu)^\mu u_\tau^{\nu-\varkappa} v_\tau^\varkappa s_x^m t_x^{n-\lambda} (tuv)^\lambda = \sum_{pr\varrho} C'_{pr\varrho} \left[s_\tau^\varrho (stu)^{\mu+r-\varrho}\right]_{\widehat{uv}^{\lambda-r+\varrho}} v^{\varkappa-\varrho}, \; w^p, (w = \widehat{x\,uv}),$$

läßt also nicht die Vereinfachung zu, die bei unserer Entwicklung schon im Laufe der Rechnung eintritt, wenn man weiß, daß alle Glieder mit dem Faktor u_x auszulassen sind.

**) *Gordan*, Über Kombinanten. § 2 und 5 (Math. Ann. Bd. V).

Entwicklungen nach Potenzen von u_x aufstellen, deren Koeffizienten zusammengesetzte Polaren der Formenreihe $s_x^m t_x^n u_\sigma^\mu u_\tau^\nu$ sind, genommen nach den Variablen x und u.

Es genügt, die Reihe für je zwei kontragrediente Symbol- (bzw. Variablen-) reihen aufzustellen, da sich durch Zusammenfassen von je zwei Symbol- (Variablen-) reihen zu einer einzigen neuen Reihe Formen mit mehr Symbol- (Variablen-) reihen auf diesen Fall zurückführen lassen.

Um zu erreichen, daß alle Formen der Formenreihe nur je zwei Symbol- bzw. Variablenreihen enthalten, spezialisieren wir:

$$\text{a)}\ \sigma = \widehat{st}, \qquad \text{a}')\ y = \widehat{uv},$$
$$\text{b)}\ s = \widehat{\sigma\tau}, \qquad \text{b}')\ v = \widehat{xy}$$

und führen die Entwicklung für die Spezialisierung a), a') durch.

Durch direkte Übertragung der Entwicklung I erhält man zusammengesetzte Polaren für Formen $(stu)^\mu s_x^m t_x^{n-\lambda} t_y^\lambda$, während für Formen $(stu)^\mu u_\tau^{\nu-\varkappa} v_\tau^\varkappa s_x^m t_x^{n-\lambda} t_y^\lambda$ anstatt zusammengesetzter Polaren Glieder solcher entstehen, deren Auswertung die Einführung immer neuer, erst am Schlusse gleichzusetzender Hilfsvariablen nötig macht, wodurch die Rechnung unnötig kompliziert wird.

Wir schlagen deshalb einen indirekten Weg ein, indem wir die zusammengesetzten Polaren aller Formen der Formenreihe, also Ausdrücke

$$\left[s_\tau^\varrho (stu)^{\mu-\varrho+r}\right]_{y^\lambda} v^\varkappa$$

darstellen durch die Anfangsglieder dieser Polaren und durch Umkehrung des entstehenden rekurrierenden Gleichungssystems die gewünschte Entwicklung nach Polaren erhalten.

Nach dem Übertragungsprinzip gilt für die λ-te Polare einer Form $s_x^m t_x^n$: $\left[s_x^m t_x^n\right]_{y^\lambda}$ $(\lambda \leqq n)$ folgende Entwicklung*) (der Fall $\lambda > n$ führt durch die Entwicklung von $\left[s_y^m t_y^n\right]_{x^{m+n-\lambda}}$ auf den ersten zurück):

*) *Gordan*, Die Resultante binärer Formen (Kap. I, § 5). Rend. Circ. Mat. di Palermo XXII. 1906.

$$\left[s_x^m t_x^n\right]_{y^\lambda} = \sum_r (-1)^r \frac{\binom{m}{r}\binom{\lambda}{r}}{\binom{m+n}{r}} \cdot (st\widehat{xy})^r s_x^{m-r} t_x^{n-\lambda} t_y^{\lambda-r}$$

und entsprechend für die $\varkappa$-te Polare von $u_\sigma^\mu u_\tau^\nu$: $[u_\sigma^\mu u_\tau^\nu] v^\varkappa$

$$[u_\sigma^\mu u_\tau^\nu] v^\varkappa = \sum_\varrho (-1)^\varrho \frac{\binom{\mu}{\varrho}\binom{\varkappa}{\varrho}}{\binom{\mu+\nu}{\varrho}} (\sigma\tau\,\widehat{uv})^\varrho u_\sigma^{\mu-\varrho} u_\tau^{\nu-\varkappa} v_\tau^{\varkappa-\varrho}.$$

Durch Multiplikation folgt, unter Einführung von Spezialisierung a) und a')

$$\left[s_x^m t_x^n (stu)^\mu u_\tau^\nu\right]_{\widehat{uv}^\lambda} v^\varkappa = \sum_{r,\varrho} c_{r\varrho} \cdot (st\,\widehat{x\,\widehat{uv}})^r (\widehat{st}\,\tau\,\widehat{uv})^\varrho s_x^{m-r} t_x^{n-\lambda} (tuv)^{\lambda-r} (stu)^{\mu-\varrho} u_\tau^{\nu-\varkappa} v_\tau^{\varkappa-\varrho}$$

und daraus, durch Entwicklung nach Potenzen von u_x unter Auszeichnung des ersten Gliedes ($\sum\limits_{r,\varrho}'$ bedeutet, daß das Glied $r=0$, $\varrho=0$ auszulassen ist) und Berücksichtigung von (a) S. 26

$$\text{(II.)}\quad \begin{aligned} s_x^m t_x^{n-\lambda} (tuv)^\lambda (stu)^\mu u_\tau^{\nu-\varkappa} v_\tau^\varkappa &= \left[s_x^m t_x^n (stu)^\mu u_\tau^\nu\right]_{\widehat{uv}^\lambda} v^\varkappa \\ &- \sum_{r,\varrho}' c_{r\varrho} \cdot s_\tau^\varrho (stu)^{\mu-\varrho+r} u_\tau^{\nu-\varkappa} v_\tau^{\varkappa-\varrho} s_x^{m-r} t_x^{n-\lambda} (tuv)^{\lambda-r+\varrho} \cdot v_x^r \\ &+ u_x \cdot \sum_\varrho \cdot \sum_{r=1}^{\lambda} c_{r\varrho} \cdot s_\tau^\varrho (stu)^{\mu-\varrho+r-1} (stv) u_\tau^{\nu-\varkappa} v_\tau^{\varkappa-\varrho} s_x^{m-r} t_x^{n-\lambda} (tuv)^{\lambda-r+\varrho} \cdot v_x^{r-1} \\ &\;\vdots \\ &- (-1)^\lambda u_x^\lambda \cdot \sum_\varrho c_{\lambda\varrho} \cdot s_\tau^\varrho (stu)^{\mu-\varrho} (stv)^\lambda u_\tau^{\nu-\varkappa} v_\tau^{\varkappa-\varrho} s_x^{m-\lambda} t_x^{n-\lambda} (tuv)^\varrho, \end{aligned}$$

$$c_{r\varrho} = (-1)^{r+\varrho} \cdot \frac{\binom{m}{r}\binom{\lambda}{r}}{\binom{m+n}{r}} \cdot \frac{\binom{\mu}{\varrho}\binom{\varkappa}{\varrho}}{\binom{\mu+\nu}{\varrho}} \qquad \text{für } \begin{array}{l}\lambda \leq n \\ \varkappa \leq \nu\end{array}$$

und entsprechend für die übrigen Zusammenstellungen der Zahlen λ, n; $\varkappa, \nu$. Der Ausdruck $s_x^m t_x^{n-\lambda} (tuv)^\lambda (stu)^\mu u_\tau^{\nu-\varkappa} v_\tau^\varkappa$ ist also zurückgeführt auf eine zusammengesetzte Polare, und, unter Anwendung der Identität

$$(stv)\, u_\iota = (stu)\, v_\iota - s_\iota\, (tuv),$$

auf eine Summe von analog gebildeten Ausdrücken, die höheren Formen der Formenreihe entsprechen.

Durch Iteration gelangt man zu der Entwicklung:

$$\text{(III.)} \quad s_x^m t_x^{n-\lambda} (tuv)^\lambda (stu)^\mu u_\tau^{\nu-\varkappa} v_\tau^\varkappa = \sum_{p,r,\varrho} u_x^p \cdot C_{pr\varrho} \cdot \left[s_\tau^\varrho (stu)^{\mu-\varrho+r} \right]_{\widehat{uv}^{\lambda-r+\varrho}} v^{\varkappa-\varrho+p} \cdot v_x^{r-p}.$$

Die numerischen Koeffizienten $C_{pr\varrho}$ berechnen sich eindeutig und rekurrierend aus den Koeffizienten $c_{r\varrho}$, $c'_{r\varrho}$ des durch Iteration von (II.) entstehenden Gleichungssystems (vgl. das Beispiel S. 42). Analoge Entwicklungen ergeben sich bei den übrigen Spezialisierungen.

§ 3. *Reduktionssätze.*

Die bekannten Sätze über die Reduktion von Formen und Formensystemen sollen nun mit den Paragraphen 1 und 2 in Zusammenhang gebracht werden, wozu einige aus der Theorie der binären Formen übernommene Definitionen nötig sind.

a) Wir bezeichnen als *relativ vollständiges System* modulo einer vorgegebenen Reihe von Formen, ein System von Formen von der Eigenschaft, daß alle durch Faltung eines beliebigen Produktes dieser Formen entstehenden Bildungen sich ausdrücken lassen als ganze rationale Funktionen der Formen des Systems, bis auf ein additives Glied von Ausdrücken, die durch Faltung der Systemformen mit dem System des Moduls entstanden sind*).

b) Wir nennen eine Form dann *reduzibel*, wenn sie sich ausdrücken läßt durch Formen, die Invarianten zum Faktor haben oder durch „höhere Formen"; d. h. durch höhere Formen der Gesamtformenreihe, der die Form angehört, oder durch Formen, die die Symbole des Moduls in höherer Ordnung enthalten.

Die Sätze über Reduzenten**) lassen sich nun in ihrer allgemeinsten Form in folgender Weise aussprechen:

Definition: *Ein Reduzent ist eine reduzible Formenreihe.*

Satz II. *Ist die Anfangsform einer Formenreihe reduzibel dadurch, daß eines ihrer Glieder durch Faltung mit einem Reduzenten hervorgegangen ist (einen Reduzenten zum Faktor hat), und ist die Schlußform der Formen-*

*) *Gordan-Kerschensteiner*, Vorlesungen über Invariantentheorie. Bd. II. S. 227.

**) *Gordan*, Math. Annalen Bd. XVII. S. 222.

reihe aus eben diesem Glied durch Faltung entstanden, so ist die Gesamtformenreihe reduzibel).*

Beweis: Die Formenreihe entsteht aus dem Anfangsglied durch Faltung in sich, also durch höhere Faltung mit dem Reduzenten einerseits, durch Faltung des Reduzenten in sich andererseits. In beiden Fällen lassen sich, nach § 2, alle Formen der Formenreihe darstellen als Polaren (Überschiebungen) über die Formenreihe des Reduzenten.

Der Schluß von der Anfangsform auf die Gesamtformenreihe hat nicht mehr statt bei den übrigen Reduktionsmethoden. Es sind dies

1) die sogenannte „*doppelte Reduktion*“.

Wir verstehen darunter die Reduktion eines Ausdrucks, der zwei voneinander unabhängige Reduzenten zum Faktor hat, auf doppelte Art, wodurch Relationen zwischen den höheren Formen entstehen, auf die reduziert wurde.

Durch systematische Anwendung der „doppelten Reduktion“ muß man einerseits alle Relationen erhalten**), andrerseits hat man, wenn die „doppelte Reduktion“, auf verschiedene Ausdrücke angewandt, keine neuen Relationen liefert, sowohl ein Kriterium für die Unabhängigkeit der höheren Formen wie eine Kontrolle der Rechnung.

2) *Faltung mit zerfallenden Formen.*

Unter „zerfallenden Formen“ sollen — mit geringer Verallgemeinerung des gebräuchlichen Begriffs — Formen verstanden werden, die sich ausdrücken lassen durch Produkte von Formen niedrigeren Grades und durch „höhere“ Formen. Produkte von Formen gehen bei einmaliger Faltung

---

*) Die Vereinfachung, die durch Satz II eintritt, läßt sich an folgendem Beispiel zeigen: Für die spezielle Form $f = x_1^3 x_2 + x_2^3 x_3 + x_3^3 x_1$ ist $a_\nu^2 a_x^2 u_\nu^2$ Reduzent. Daraus folgt nach Satz II die Reduktion der Formenreihe $\theta_\nu(\vartheta \nu x)\theta_x^3 u_\vartheta u_\nu^2 = a_\nu^2(abu) - a_\nu \underbrace{b_\nu(abu)}_{0}$, da $\theta_\nu^4 = a_\nu^2 b_\nu^2 (abu)^2$ aus dem Glied $a_\nu^2(abu)$ durch Faltung entstanden. Bei *Gordan*, a. a. O. S. 231, wird hingegen die Reduktion der Formen

$$\theta_\nu(\vartheta \nu x),\ \theta_\nu(\vartheta \nu x)^2,\ \theta_\nu^2,\ \theta_\nu^2(\vartheta \nu x),\ \theta_\nu^2(\vartheta \nu x)^2$$

einzeln durchgeführt.

**) So wurden beispielsweise durch „doppelte Reduktion“ gefunden: die Reduktion der Form a_η^3 (§ 10), der einzigen bei *Maisano* überflüssig ins System aufgenommenen Form; sodann die in der Anmerkung zur Einleitung erwähnten Relationen zwischen den 3 Kovarianten und den 3 Invarianten.

in Produkte über; ebenso Produkte von *nichtlinearen* Formen bei zweimaliger Faltung bei den Spezialisierungen a') und b') (§ 2) nach dem Produktsatz:

$$a_y b_y a_x b_x = \frac{1}{2} a_y^2 \cdot b_x^2 + \frac{1}{2} b_y^2 \cdot a_x^2 - \frac{1}{2} (a b \widehat{yx})^2.$$

Erste Polaren (Überschiebungen) und gewisse zweite Polaren zerfallender Formen sind also wieder zerfallende Formen. Es folgt:

Ein durch einmalige (bzw. zweimalige) Faltung mit einer zerfallenden Form entstandenes *Glied* einer einmaligen (zweimaligen) Überschiebung über eine zerfallende Form wird selbst eine zerfallende Form:

a) wenn die nächsthöheren Formen in der Formenreihe der zerfallenden Form zerfallen oder reduzibel werden, oder auch wenn bei einmaliger Faltung die Spezialisierungen $y = \widehat{uv}$ oder $v = \widehat{xy}$ eintreten;

b) wenn die übrigen einmaligen Faltungen auf höhere Formen führen (vgl. § 12, *B.* H_k und $H_k(k\eta x)$).

Ein solches Glied einer Überschiebung kann auch zerfallen:

c) wenn die übrigen einmaligen Faltungen auf niedrigere Formen führen, die unabhängig von der Faltung mit der zerfallenden Form zerfallen, d. h. sich ausdrücken lassen durch Produkte und durch die zu reduzierende Form, wobei man sich aber jeweils erst durch Rechnung überzeugen muß, daß der numerische Koeffizient des betreffenden Gliedes nicht identisch verschwindet. Es ist dies nichts weiter als „doppelte Reduktion" der niederen Form (vgl. § 23, *C.* $H_9\,(\theta H u)\,(\theta s u)$).

Zerfallende Formen entstehen durch alle einmaligen Faltungen mit Funktionalindetermanten*), außerdem durch gewisse höhere Faltungen. Es wird

$$(s t \widehat{yx})\, s_y = \frac{1}{2} t \cdot s_y^2 - \frac{1}{2} s \cdot t_y^2 + \frac{1}{2} (s t \widehat{yx})^2,$$

$$(s t \widehat{yx}) s_y^2 = \frac{1}{3} t \cdot s_y^3 - \frac{1}{3} s \cdot t_y^3 + s_y (s t \widehat{yx})^2 - \frac{1}{3} (s t \widehat{yx})^3.$$

Analoge Formeln gelten für die dualistischen Formen

$$(\sigma \tau \widehat{vu})\, v_\sigma \quad \text{und} \quad (\sigma \tau \widehat{vu})\, v_\sigma^2.$$

*) vgl. *Gordan*, a. a. O. § 3.

Nach den Sätzen dieses Paragraphen ergibt sich für die Aufstellung aller irreduziblen Formen, die aus der Faltung von S mit T entstehen, folgende Regel:

Man gehe, bei den niedrigsten Faltungen beginnend, auf beliebigem, vorher festgelegtem Wege (z. B. zeilenweise oder symmetrisch zum Diagonalglied) so weit in der Bildung der Formenreihe ST voran, bis man an eine Form gelangt, die einen Reduzenten zum Faktor hat. Die durch diese Form definierte Formenreihe ist auszulassen, sobald die Schlußform die in Satz II aufgestellte Bedingung erfüllt. Nach Ausscheidung aller reduziblen Formenreihen sind durch Anwendung der doppelten Reduktion alle übrigen reduziblen, ebenso alle zerfallenden Formen zu entfernen. Stellen der Gesamtformenreihe, die durch unabhängig voneinander reduzible Formenreihen doppelt überdeckt sind, geben Anlaß zur Reduktion von höheren Formen (vgl. § 11, *D*).

Kapitel II. Relativ vollständige Grundsysteme.

§ 4. *Erstes relativ vollständiges System.*

Wir beschränken uns im folgenden auf die biquadratische Form, mit Ausnahme des ersten Satzes. Doch lassen sich, bei passender Wahl der Moduln, die Resultate der §§ 5 und 6 leicht auf Formen höheren Grades übertragen, ebenso wie sie für die kubische Form gelten*).

Man erhält ein erstes relativ vollständiges System für Formen beliebigen Grades nach dem bekannten Satze:

---

*) Für die kubische Form lauten die entsprechenden, analog abgeleiteten Formeln:

$$(abc)a_x^2 b_y^2 c_z^2 = \frac{1}{3}(sxy)(sxz)(syz) + \frac{2}{3}\Delta_x \Delta_y \Delta_z \cdot (xyz), \quad \text{(IV.)}$$

$$s = (abc)(abu)(acu)(bcu), \qquad \Delta = (abc)^2 a_x b_x c_x,$$
$$t = \Delta_\vartheta (\Delta \theta u)^2 u_\vartheta = \theta_s^2 u_s u_\vartheta^2, \qquad T = a_t^3.$$

$$\left.\begin{array}{ccc} & (a\theta u)^2 = \frac{1}{3} u_x s, & \\ a_\vartheta = \frac{1}{3} u_x \cdot \Delta, & a_\vartheta (a\theta u) = 0, & a_\vartheta (a\theta u)^2 = s, \\ & a_\vartheta^2 = \Delta, & a_\vartheta^2 (a\theta u) = 0. \end{array}\right\} \quad (1.)$$

Satz III. *Die aus dem binären Gebiet übernommenen Formen, d. h. diejenigen Formen, die aus den Systemformen der entsprechenden binären Form nach dem Clebschschen Übertragungsprinzip durch Ränderung entstehen, bilden ein relativ vollständiges System mod (abc).*

Beweis: Einer binären Relation, die aussagt, daß die Formen $Q'_1, \dots Q'_n$ ein vollständiges System einer binären Grundform bilden:

$$Q' - F(Q') = 0 = \sum_\lambda \{(ab)c_x + (bc)a_x + (ca)b_x\}\varphi_\lambda \text{*)}$$

entspricht durch Ränderung die ternäre Relation:

$$Q - F(Q_i) = \sum_\lambda u_x \cdot (abc)\varphi_\lambda.$$

Dies ist aber die Definitionsgleichung für ein relativ vollständiges System mod (abc). Für die biquadratische Form besteht das System der übernommenen Formen aus folgenden Formen:

$$f = a_x^4; \quad \theta = \theta_x^4 u_\vartheta^2 = (abu)^2 a_x^2 b_x^2; \quad K = K_x^6 u_k^3 = (a\theta u) u_\vartheta^2 a_x^3 \theta_x^3;$$
$$j = u_j^6 = (a\theta u)^4 u_\vartheta^2; \quad \nu = u_\nu^4 = (abu)^4,$$

unter denen die vier ersten ein relativ vollständiges System mod $((abc), \nu)$ bilden.

§ 5. *Zurückführung des Moduls (abc) auf die Moduln Δ und ν.*

Der nur durch einen Klammerfaktor gegebene Modul (abc) ist in Übereinstimmung mit der Definition (§ 3, a) auf Formen des Systems zurück-

---

$$a_s^2 a_x u_s = \frac{1}{3} a_s^3 \cdot u_x = \frac{1}{3} S \cdot u_x. \quad (2.)$$

$$\left.\begin{aligned} (a\Delta u)^2 &= a_s - \frac{S}{6} u_x^2, \\ (a\Delta u)^3 &= 0. \end{aligned}\right\} \quad (3.)$$

$$\left.\begin{aligned} \theta(s) &= (s s_1 x)^2 = 2a_t + \frac{1}{3} S \cdot \theta - \frac{1}{3} T u_x^2, \\ \theta(t) &= (t t_1 x)^2 = -\frac{1}{3} S \cdot a_t + \frac{2}{3} T \cdot a_s + \frac{1}{18} S^2 \cdot \theta - \frac{1}{18} u_x^2 \cdot S \cdot T. \end{aligned}\right\} \quad (4.)$$

Reihe der Moduln: (abc); Δ; s; t (das System des Moduls t besteht aus der einzigen Form t).

*) *Gordan-Kerschensteiner*, a. a. O. S. 134.

zuführen. In anderen Worten: die Formenreihe (abc) ist eindeutig zu normieren (vgl. § 1).

Es wird sich zeigen, daß die Formen:

$$\Delta = (abc)^2 a_x^2 b_x^2 c_x^2, \quad \nu = (abu)^4$$

als Modul genügen, d. h. daß die Formen

$$\Delta = (abc)^2 a_x^2 b_x^2 c_x^2, \quad a_\nu = (abc)(bcu)^3 a_x^3, \quad a_\nu^2 = (abc)^2 (bcu)^2 a_x^2, \quad i = a_\nu^4 = (abc)^4$$

die Formenreihe (abc) definieren.

In der Formenreihe a_ν fehlt die Form a_ν^3 nach der Identität:

$$a_\nu^3 = (abc)^3 a_x (bcu) = \frac{1}{3} u_x \cdot (abc)^4 = \frac{1}{3} i \cdot u_x.$$

Zur Zurückführung eines Moduls auf einen höheren haben wir nach der Definition die allgemeinsten Faltungen oder auch alle speziellen in Betracht kommenden Faltungen mit dem Modul auf Faltungen mit dem höheren Modul zurückzuführen.

Die allgemeinsten Faltungen entstehen in unserm Fall aus den Ausdrücken:

$$(abc) a_x^3 b_y^3 c_z^3, \quad (abc) a_x^2 b_y^2 c_z^2 a_x b_x c_x$$

(aus den kubischen Formen übernommen),

$$(abc) a_x b_y c_z a_x^2 b_x^2 c_x^2$$

(aus den quadratischen Formen übernommen) und durch Polarisation dieser Ausdrücke.

Zur Berechnung dieser Ausdrücke durch die Polaren von Δ und der Formenreihe a_ν, bzw. deren Anfangsglieder, schlagen wir, wie in § 2, den indirekten Weg ein. Wir entwickeln die Polarenglieder

$$(abc)^2 a_x^2 b_y^2 c_z^2, \quad a_\nu (\nu xy)(\nu yz)(\nu zx) a_x a_y a_z = (abc)(bc\widehat{xy})(bc\widehat{yz})(bc\widehat{zx}) a_x a_y a_z \text{ usw.}$$

als lineare Aggregate von Ausdrücken mit dem symbolischen Faktor (abc) und erhalten durch Umkehrung des Gleichungssystems die gesuchten Relationen, sowie eine Relation zwischen den nach verschiedenen Kombina-

tionen der Variablen genommenen Polaren. Zur Auswertung dient der Identitätssatz und der Produktsatz für Determinanten.

Das Gleichungssystem lautet für $(abc)a_x^3 b_y^3 c^3$:

$$1)\quad \sum_3 a_\nu (\nu yz)^3 a_x^3 = 6(abc)a_x^3 b_y^3 c_z^3 - 6\sum_3 (abc)a_x^3 b_y^2 b_z c_z^2 c_y\,{}^{*)},$$

$$2)\quad 3(abc)^2 a_x^2 b_y^2 c_z^2\cdot(xyz) - \frac{1}{2}\sum_3 a_\nu^2(\nu yz)^2 a_x^2\cdot(xyz) = 2\sum_3 (abc)a_x^3 b_y^2 b_z c_z^2 c_y - 4\sum_3 (abc)a_x a_y a_z b_y^2 b_x c_z^2 c_x,$$

$$3)\quad a_\nu(\nu xy)(\nu yz)(\nu zx)a_x a_y a_z = 2\sum_3 (abc)a_x a_y a_z b_y^2 b_x c_z^2 c_x,$$

$$4)\quad \sum_3 a_\nu(\nu yz)^3 a_x^3 - \frac{3}{2}\sum_3 a_\nu^2(\nu yz)^2 a_x^2\cdot(xyz) + \frac{1}{6}i\cdot(xyz)^3 = 6\sum_3 (abc)a_x a_y a_z b_y^2 b_x c_z^2 c_x.$$

Daraus folgt für $(abc)a_x^3 b_y^3 c_z^3$, und durch analoge Rechnung für $(abc)a_x^2 b_y^2 c_z^2 a_x b_x c_x$, $(abc)a_x b_y c_z a_x^2 b_x^2 c_x^2$:

$$(abc)a_x^3 b_y^3 c_z^3 = \frac{3}{2}(abc)^2 a_x^2 b_y^2 c_z^2\cdot(xyz) + \frac{3}{2}a_\nu(\nu xy)(\nu yz)(\nu zx)a_x a_y a_z - \frac{1}{12}i\cdot(xyz)^3,$$

$$\text{(IV.)}\quad (abc)a_x^2 b_y^2 c_z^2 a_x b_x c_x = \frac{2}{3}(abc)^2 a_x^2 b_y b_x c_z c_x\cdot(xyz) + \frac{1}{3}a_\nu(\nu xy)(\nu yz)(\nu zx)a_x^3 - \frac{1}{6}a_\nu^2(\nu xy)(\nu zx)a_x^2\cdot(xyz),$$

$$(abc)a_x b_y c_z a_x^2 b_x^2 c_x^2 = \frac{1}{6}(abc)^2 a_x^2 b_x^2 c_x^2\cdot(xyz).$$

Wir haben somit ein relativ vollständiges System mod $(\varDelta, \nu)$ erhalten, bestehend aus den vier Formen: f, θ, K, j.

Es folgt daraus: Alle nicht aus dem binären Gebiet übernommenen Überschiebungen von f über θ, ebenso wie die im Binären auf $(ab)^4$ reduzible Überschiebung $(a\theta u)^2$ lassen sich ausdrücken durch Symbole $\varDelta$ und ν.

---

*) $\sum\limits_3$ bezieht sich auf die durch zyklische Vertauschung der Variablen aus dem Anfangsglied entstehende Summe über drei Glieder. Die Gleichungen gelten auch einzeln für jedes Glied der Summe.

Wir erhalten die für das Folgende grundlegenden Reduktionsformeln, durch Spezialisierung von Entwicklung IV, oder kürzer durch direkte Rechnung (Vertauschen der Symbole), für $a_\vartheta(a\theta u)^2$, $a_\vartheta^2(a\theta u)^2$, $(a\theta u)^2$ nach folgendem Ansatz:

$$a_\vartheta(a\theta u)^2=(abc)(bcu)(abu)^2-\frac{1}{3}(abc)(bcu)\{(bcu)a_x-u_x\cdot(abc)\}^2,$$

$$a_\vartheta^2(a\theta u)^2=(abc)^2(abu)^2-\frac{1}{3}(abc)^2\{(bcu)a_x-u_x\cdot(abc)\}^2$$

für $(a\theta u)^{2}$ *): $(abu)a_y^3b_x^3=\frac{3}{2}u_\vartheta(\vartheta yx)\theta_y^2+\frac{1}{4}(\nu yx)^3,$

$$(abu)(acu)^3b_x^3=\frac{3}{2}u_\vartheta(\vartheta\widehat{au}x)(\theta au)^2+\frac{1}{4}(\nu\widehat{au}x)^3:$$

$$(1.)\qquad \underline{a_\vartheta}=\frac{1}{3}u_x\cdot\Delta\left|\begin{array}{l}\underline{(a\theta u)^2}=\frac{1}{6}\nu\cdot f-\frac{2}{3}u_x\cdot a_\nu+\frac{2}{3}u_x^2\cdot a_\nu^2-\frac{i}{18}u_x^4\\ \underline{a_\vartheta(a\theta u)}=0\\ \underline{a_\vartheta^2}=\Delta\end{array}\right|*$$

$$*\left|\begin{array}{l}\underline{(a\theta u)^3}=0\\ \underline{a_\vartheta(a\theta u)^2}=-\frac{5}{6}a_\nu+\frac{7}{6}u_x\cdot a_\nu^2-\frac{i}{9}u_x^3\\ \underline{a_\vartheta^2(a\theta u)}=0\end{array}\right|\begin{array}{l}\underline{(a\theta u)^4}=j\\ \underline{a_\vartheta(a\theta u)^3}=0\\ \underline{a_\vartheta^2(a\theta u)^2}=\frac{2}{3}a_\nu^2-\frac{i}{9}u_x^2\end{array}$$

Wir nehmen dazu die ebenfalls aus der Reduktion des Moduls (abc) entstandene Formel:

$$(2.)\qquad a_\nu^3a_xu_\nu=\frac{1}{3}i\cdot u_x.$$

Aus den Formeln (1.) *und* (2.) *und den für die Grundform ν analog gebildeten Formeln leiten sich alle späteren Reduktionsformeln durch Polarisation ab,* **ausgenommen die Relationen für die zerfallenden Formen. Aus den Formeln (1.) sehen wir:**

*) *Gordan-Kerschensteiner*, a. a. O. S. 92.

Es führt die Formenreihe: $a_\vartheta (a\theta u)^2$ auf Symbole ν allein,

a_ϑ auf Symbole $\varDelta$ und ν,

$(a\theta u)^2$ auf Symbole j, $\varDelta$ und ν,

$(a\theta u)^2$ bei Faltung I auf Symbole j und ν,

$(a\theta u)^2$ bei Faltung II auf Symbole $\varDelta$ und ν.

Wir können also ersetzen:

1) mod $(\varDelta, \nu)$: Faltungen mit j durch entsprechende mit $(a\theta u)^2$ oder $(a\theta u)^3$;

2) mod (ν): Faltungen mit $\varDelta$ durch entsprechende mit a_ϑ oder $a_\vartheta(a\theta u)$ oder auch durch spezielle mit $(a\theta u)^2$ (die nur zu einmaliger Faltung I führen).

Es wird insbesondere:

$$(a\theta u)^2 a_y^2 \theta_x^2 = \frac{1}{3}(jyx)^2 \bmod \nu, \qquad (a\theta u)^2 a_y \theta_y = -\frac{1}{6}(jyx)^2 \bmod \nu,$$

$$(a\theta u)^2 v_\vartheta^2 = \frac{1}{3}(\varDelta uv)^2 \bmod \nu, \qquad (a\theta u)(a\theta v) u_\vartheta v_\vartheta = -\frac{1}{6}(\varDelta uv)^2 \bmod \nu,$$

$$(a\theta u)^2 a_y v_\vartheta^2 = \frac{1}{3}(\varDelta uv)^2 \varDelta_y \bmod \nu.$$

§ 6. *Zurückführung des Moduls $(\varDelta, \nu)$ auf den Modul (ν).*

Die Reduktionsformeln des letzten Paragraphen geben uns das Mittel, direkt das relativ vollständige System mod ν aufzustellen; wir werden sehen, daß wir dem System der übernommenen Formen nur die Formen $\varDelta$ und $(a\varDelta u) = N$ beizufügen haben (analog wie bei der kubischen Form und überhaupt allgemein gültig).

Wir betrachten zur Reduktion des Moduls $\varDelta$ alle speziellen in Betracht kommenden Faltungen, d. h. die Faltungen des relativ vollständigen Systems mod $(\varDelta, \nu)$ mit dem System von $\varDelta$, und gehen aus von den in den Koeffizienten niedrigsten Formen, den Faltungen von f mit $\varDelta$.

Zur Reduktion der Formen $(a\Delta u)^2$, $(a\Delta u)^3$, $(a\Delta u)^4$ ersetzen wir nach § 5 die Symbole Δ durch niedrigere Formen der Formenreihe, d. h. wir entwickeln die Ausdrücke

$$a_\vartheta b_\vartheta (b\theta u)^2, \quad a_\vartheta (a\theta u) b_\vartheta (b\theta u)^2, \quad a_\vartheta (a\theta u) b_\vartheta (b\theta u)^3$$

1) nach Polaren der Formenreihe a_ϑ (Symbole Δ und ν),

2) nach Polaren der Formenreihe $b_\vartheta (b\theta u)^2$ (Symbole ν)

und erhalten die Reduktionsformeln (Rechnung siehe unten):

$$\text{a)}\quad \underline{(a\Delta u)^2} = \frac{1}{2}(\vartheta\nu x)^2 - \frac{2}{5} f\cdot a_\nu^2 - \frac{4}{5} u_x \cdot \theta_\nu (\vartheta \nu x)^2 + u_x^2 \left\{ \frac{1}{6} i f - \frac{1}{40} s \right\},$$

$$(3.)\quad \text{b)}\quad \underline{(a\Delta u)^3} = -\frac{3}{10} \theta_\nu (\vartheta\nu x),$$

$$\text{c)}\quad \underline{(a\Delta u)^4} = \frac{21}{10} \theta_\nu^2 - \frac{3}{10} H - \frac{6}{5} u_x \cdot \theta_\nu^3 + \frac{1}{10} u_x^2 \cdot \varrho.$$

(Zu den gleichen Resultaten führt auch die doppelte Reduktion der Ausdrücke $a_\vartheta^2 (b\theta u)^2$, $a_\vartheta^2 (b\theta u)^3$, $a_\vartheta^2 (a\theta u)^2 (b\theta u)^2$ und $a_\vartheta^2 (a\theta u)(b\theta u)^3$ nach Elimination von a_ϑ^2).

Aus den Formeln (3.) folgt, daß $(a\Delta u)^2$ Reduzent ist in bezug auf den Modul ν. Daraus ergibt sich:

1) Die Reduktion des Systems von Δ: Die Formenreihe $(\Delta\Delta' u)^2 \equiv a_\vartheta^2 (a\Delta u)^2$ hat den Reduzenten $(a\Delta u)^2$ zum Faktor.

2) Die Reduktion des durch Faltung mit dem Modul Δ entstandenen Systems:

Die Formenreihe $(\theta\Delta u)^2$ hat den Reduzenten $(a\Delta u)^2$ zum Faktor.

Für die Formen $(\theta\Delta u)$ und Δ_ϑ ergibt sich:

$$(a\Delta u)^2 (a b u) = (\theta \Delta u) - u_x \cdot \Delta_\vartheta (\theta \Delta u),$$

$$(a\Delta u)(a\Delta b) = -\frac{1}{2} \Delta_\vartheta + \frac{1}{2} u_x \cdot \Delta_\vartheta^2.$$

Aus dem Reduzenten $(\theta\Delta u)$ folgt aber die Reduktion des durch Faltung mit dem Modul Δ entstehenden Systems.

Das relativ vollständige System mod ν besteht also aus den sechs Formen:

$$f,\ \theta,\ K,\ j,\ \varDelta,\ N.$$

Als Beispiel zur Reihenentwicklung in § 2 geben wir die Ableitung der Formel (3.)a ausführlich, bei späteren Rechnungen soll direkt die Schlußformel III aufgestellt werden. (Polaren verschwindender Formen sind schon während der Rechnung ausgelassen; die erste Zeile gibt die nach Entwicklung II eingetragenen Werte, die zweite Zeile die, mit der letzten Gleichung des Systems beginnend, rekurrierend gefundenen Schlußwerte.)

Es folgt nach Entwicklung II:

1) $\quad m=3.\quad n=4.\quad \lambda=2.\quad \mu=0.\quad \nu=\varkappa=1.$

$$\underline{a_\vartheta b_\vartheta (b\theta u)^2} = [a_\vartheta]_{\widehat{u b^2}}\, b + \frac{6}{7}\{a_\vartheta b_\vartheta (a\theta u)(b\theta u) - u_x\cdot a_\vartheta b_\vartheta (a\theta b)(b\theta u)\}$$
$$-\frac{1}{7}\{a_\vartheta (a\theta u)^2 b_\vartheta - 2u_x\cdot a_\vartheta (a\theta u)(a\theta b)\, b_\vartheta + u_x^2\cdot a_\vartheta (a\theta b)^2 b_\vartheta\}$$
$$=\frac{2}{3}(a\varDelta u)^2 + \frac{1}{5}[a_\vartheta (a\theta u)^2]\, b + \frac{1}{30} f\cdot[a_\vartheta^2 (a\theta u)^2] - \frac{2}{5}u_x\cdot[a_\vartheta (a\theta u)^2]\, b^2$$
$$-\frac{1}{15}u_x\cdot[a_\vartheta^2 (a\theta u)^2]\, b + \frac{1}{5}u_x^2\cdot[a_\vartheta (a\theta u)^2]\, b^3 + \frac{1}{30}u_x^2\cdot[a_\vartheta^2 (a\theta u)^2]\, b^2.$$

2) $\quad m=2.\quad n=3.\quad \lambda=1.\quad \mu=1.\quad \nu=\varkappa=1.$

$$\underline{a_\vartheta (a\theta u)\, b_\vartheta (b\theta u)} = \frac{2}{5}\{a_\vartheta (a\theta u)^2 b_\vartheta - u_x\cdot a_\vartheta (a\theta u)(a\theta b)\, b_\vartheta\} + \frac{1}{2}a_\vartheta^2 (b\theta u)^2$$
$$-\frac{1}{5}\{a_\vartheta^2 (b\theta u)(a\theta u) - u_x\cdot a_\vartheta^2 (a\theta b)(b\theta u)\}$$
$$=\frac{1}{2}(a\varDelta u)^2 + \frac{2}{5}[a_\vartheta (a\theta u)^2]\, b + \frac{1}{15}[a_\vartheta^2 (a\theta u)^2]\cdot f$$
$$-\frac{2}{5}u_x\cdot[a_\vartheta (a\theta u)^2]\, b^2 - \frac{1}{10}u_x\cdot[a_\vartheta^2 (a\theta u)^2]\, b + \frac{1}{30}u_x^2\cdot[a_\vartheta^2 (a\theta u)^2]\, b^2.$$

3) $\quad m=2.\quad n=3.\quad \lambda=1.\quad \mu=1.\quad \nu=1.\quad \varkappa=2.$

$$\underline{a_\vartheta(a\theta b)\,b_\vartheta(b\theta u)} = \frac{2}{5}\{a_\vartheta(a\theta b)(a\theta u)\,b_\vartheta - u_x\cdot a_\vartheta(a\theta b)^2\,b_\vartheta\}$$

$$= \frac{2}{5}[a_\vartheta(a\theta u)^2]\,b^2 + \frac{1}{30}[a_\vartheta^2(a\theta u)^2]\,b - \frac{2}{5}u_x\cdot[a_\vartheta(a\theta u)^2]\,b^3$$

$$- \frac{1}{30}u_x\cdot[a_\vartheta^2(a\theta u)^2]\,b^2.$$

4) $m=1.\quad n=2.\quad \lambda=0.\quad \mu=2.\quad \nu=\varkappa=1.$

$$\underline{a_\vartheta(a\theta u)^2\,b_\vartheta} = [a_\vartheta(a\theta u)^2]\,b + \frac{2}{3}a_\vartheta^2(a\theta u)(b\theta u)$$

$$= [a_\vartheta(a\theta u)^2]\,b + \frac{1}{6}[a_\vartheta^2(a\theta u)^2]\cdot f - \frac{1}{6}u_x\cdot[a_\vartheta^2(a\theta u)^2]\,b.$$

5) $m=1.\quad n=2.\quad \lambda=0.\quad \mu=2.\quad \nu=1.\quad \varkappa=2.\quad (\varkappa>\nu).$

$$\underline{a_\vartheta(a\theta u)(a\theta b)\,b_\vartheta} = [a_\vartheta(a\theta u)^2]\,b^2 + \frac{1}{3}a_\vartheta^2(a\theta b)(b\theta u)$$

$$= [a_\vartheta(a\theta u)^2]\,b^2 + \frac{1}{12}[a_\vartheta^2(a\theta u)^2]\,b - \frac{1}{12}u_x\cdot[a_\vartheta^2(a\theta u)^2]\,b^2.$$

6) $m=1.\quad n=2.\quad \lambda=0.\quad \mu=2.\quad \nu=1.\quad \varkappa=3.$

$$\underline{a_\vartheta(a\theta b)^2\,b_\vartheta} = [a_\vartheta(a\theta u)^2]\,b^3.$$

7) $m=2.\quad n=4.\quad \lambda=2.\quad \mu=\nu=\varkappa=0.$ (Nach Entwicklung I).

$$\underline{a_\vartheta^2(b\theta u)^2} = [a_\vartheta^2]_{\widehat{ub^2}} + \frac{1}{10}\{[a_\vartheta^2(a\theta u)^2]\cdot f - 2\,u_x\cdot[a_\vartheta^2(a\theta u)^2]\,b + u_x^2\cdot[a_\vartheta^2(a\theta u)^2]\,b^2\}.$$

8) $m=1.\quad n=3.\quad \lambda=1.\quad \mu=1.\quad \nu=\varkappa=0.$ (Entwicklung I).

$$\underline{a_\vartheta^2(a\theta u)(b\theta u)} = \frac{1}{4}[a_\vartheta^2(a\theta u)^2]\cdot f - \frac{1}{4}u_x\cdot[a_\vartheta^2(a\theta u)^2]\,b.$$

9) $m=1.\quad n=3.\quad \lambda=1.\quad \mu=\varkappa=1.\quad \nu=0.$ (Entwicklung I).

$$\underline{a_\vartheta^2(a\theta b)(b\theta u)} = \frac{1}{4}[a_\vartheta^2(a\theta u)^2]\,b - \frac{1}{4}u_x\cdot[a_\vartheta^2(a\theta u)^2]\,b^2.$$

Aus 1) und 4) folgt:

$$(a\Delta u)^2 = \frac{6}{5}[a_\vartheta(a\theta u)^2]\,b + \frac{1}{5}f\cdot[a_\vartheta^2(a\theta u)^2] + \frac{3}{5}u_x\cdot[a_\vartheta(a\theta u)^2]\,b^2 - \frac{3}{20}u_x\cdot[a_\vartheta^2(a\theta u)^2]\,b$$

$$-\frac{3}{10}u_x^2\cdot[a_\vartheta(a\theta u)^2]\,b^3 - \frac{1}{20}u_x^2\cdot[a_\vartheta^2(a\theta u)^2]\,b^2,$$

$$(a\Delta u)^2 = -a_\nu\,b_\nu + \frac{3}{5}f\cdot a_\nu^2 + \frac{4}{5}u_x\cdot a_\nu^2\,b_\nu - \frac{3}{20}u_x^2\cdot a_\nu^2\,b_\nu^2 - \frac{1}{12}u_x^2\cdot i\cdot f.$$

(Zur Umrechnung in Symbole θ vgl. § 8 und 9.)

Formel (3.)a ließe sich noch kürzer durch direkte Übertragung von Entwicklung I unter Einführung der Hilfsvariablen $w = x\widehat{ub}$ berechnen, während schon bei Formel (3.)b und (3.)c der von uns eingeschlagene Weg der einfachere wird; bei (3.)b weiß man im voraus, nach § 9, daß alle Glieder mit dem Faktor u_x auszulassen sind. Man erhält zur Berechnung von (3.)b und (3.)c:

$$(3.)\text{b})\quad 1)\quad a_\vartheta(a\theta u)\,b_\vartheta(b\theta u)^2 = \frac{1}{2}(a\Delta u)^3 + \frac{4}{5}[a_\vartheta(a\theta u)^2]_{\widehat{ub}}\,b + \frac{77}{360}[a_\vartheta^2(a\theta u)^2]_{\widehat{ub}},$$

$$2)\quad a_\vartheta(a\theta u)\,b_\vartheta(b\theta u)^2 = [a_\vartheta(a\theta u)^2]_{\widehat{ub}}\,b + \frac{13}{36}[a_\vartheta^2(a\theta u)^2]_{\widehat{ub}};$$

$$(3.)\text{c})\quad 1)\quad a_\vartheta(a\theta u)\,b_\vartheta(b\theta u)^3 = \frac{1}{2}(a\Delta u)^4 + \frac{6}{5}[a_\vartheta(a\theta u)^2]_{\widehat{ub^2}}\,b + \frac{53}{120}[a_\vartheta^2(a\theta u)^2]_{\widehat{ub^2}}$$

$$-\frac{6}{5}u_x\cdot[a_\vartheta(a\theta u)^2]_{\widehat{ub^2}}\,b^2 - \frac{3}{5}u_x\cdot[a_\vartheta^2(a\theta u)^2]_{\widehat{ub^2}}\,b + \frac{19}{120}u_x^2\cdot[a_\vartheta^2(a\theta u)^2]_{\widehat{ub^2}}\,b^2,$$

$$2)\quad a_\vartheta(a\theta u)\,b_\vartheta(b\theta u)^3 = \frac{3}{4}[a_\vartheta^2(a\theta u)^2]_{\widehat{ub^2}}.$$

Nachbemerkung: Analog berechnen sich die nach § 5 reduziblen Überschiebungen von f über j. Es wird

$$(4.)\qquad \begin{aligned} a_j &= -\theta_\nu + u_x\cdot\left\{\frac{9}{2}\theta_\nu^2 - \frac{1}{2}H\right\} - 3\,u_x^2\cdot\theta_\nu^3 + \frac{1}{2}u_x^3\cdot\varrho, \\ a_j^2 &= \frac{21}{10}\theta_\nu^2 - \frac{3}{10}H - 2\,u_x\cdot\theta_\nu^3 + \frac{1}{2}u_x^2\cdot\varrho, \end{aligned}$$

$$
(4.)\qquad
\begin{aligned}
a_j^3 &= -\frac{7}{10}\theta_\nu^3 + \frac{1}{2}u_x \cdot \varrho, \\
a_j^4 &= \frac{3}{5}\varrho.
\end{aligned}
$$

Aus (3.) und (4.) folgt, durch Übertragung aus dem binären Gebiet, $(\theta\theta' u)^2 = \frac{1}{3}j \cdot f$ mod ν*). Die übrigen Formen der Formenreihe $(\theta\theta' u)^2$ und die Form θ_ϑ' sind reduzibel auf Symbole ν. Wir können also ersetzen:

mod ν: Faltungen mit $f \cdot j$ durch entsprechende mit $(\theta\theta' u)^2$.

Es wird ferner:

$$(\vartheta\vartheta' x)^2 = \frac{4}{3} f \cdot \Delta. \qquad \theta_{\vartheta'}(\vartheta\vartheta' x) = -N.$$

Kapitel III. Das relativ vollständige System mod (s, ϱ, t).

§ 7. *Überblick über die Bildung des Systems.*

Um von dem relativ vollständigen System mod ν zu dem relativ vollständigen System mit nächsthöherem Modul überzugehen, hat man nach der Definition § 3 das System von ν in bezug auf diesen höheren Modul zu bilden und mit den Formen des relativ vollständigen Systems mod ν zu falten. Nun aber steht $\nu = u_\nu^4$ als Kontravariante 4. Grades der Form f dualistisch gegenüber. Betrachten wir daher ν als Grundform, so erhalten wir ein relativ vollständiges System von sechs Formen mod $\nu(\nu) = (\nu\nu_1 x)^4 = s_x^4$.

Wir haben also zur Bildung des relativ vollständigen Systems mod s (System III) zu überschieben

System I: $f, \theta, K, j, \Delta, N$ über

System II: ν, $H = (\nu\nu_1 x)^2 u_\nu^2 u_{\nu_1}^2$, $L = (\nu\eta x) H_x^2 u_\nu^3 u_\eta^3$, $g = (\nu\eta x)^4 H_x^2$, $\sigma = H_\nu^2 u_\nu^2 u_\eta^4$, $(\nu\sigma x)$.

Es wird sich zeigen (Formel (13.)), daß die Form g reduzibel ist, daß also System II nur aus fünf Formen besteht.

*) *Gordan-Kerschensteiner*, a. a. O. S. 181.

Im Laufe der Rechnung werden die quadratischen Formen

$$\varrho = u_\varrho^2 = \theta_\nu^4 u_\vartheta^2, \quad t = t_x^2 = a_\eta^4 \Pi_x^2$$

als Moduln adjungiert, sodaß man ein relativ vollständiges System mod (s, ϱ, t) erhält; und zwar soll der Modul (ϱ, t) als höherer Modul als der Modul s gelten.

Die Anordnung der einzelnen Formen soll nach der Ordnung in den Koeffizienten erfolgen.

Wir normieren die Faltung

$$\theta_\eta(K_\eta, \theta_\iota, \ldots)$$

höher als die Faltung

$$\Pi_\vartheta(H_k, L_\vartheta, \ldots).$$

Dadurch ist nach § 1 und § 3b die Reihenfolge der einzelnen Formen gleicher Ordnung eindeutig bestimmt.

Die Bildung der Formen gleicher Ordnung wird tabellarisch durchgeführt:

I. Angabe, welche Formen von System I und II miteinander zu falten sind, um die bestimmte Ordnung in den Koeffizienten zu erzielen.

II. Aufstellung der irreduziblen Formen nach dem Schema der Formenreihe.

III. Reduktion der reduziblen oder zerfallenden Formenreihen oder Formen, d. h. derjenigen Stellen, wo die Gesamtformenreihe abbricht, und dadurch der Nachweis, daß alle irreduziblen Bildungen mit den angegebenen erschöpft sind.

IV. Folgerungen, und zwar 1) Angabe neu entstandener Reduzenten, 2) Angabe derjenigen Formen, die nicht in Produkten mit Formen des gleichen Systems in Faltung mit Formen des andern Systems eingehen.

Es wird sich zeigen, daß nur auftreten:

1) Faltungen von je einer Form von System I mit einer Form von System II.

2) Faltungen von Potenzen von θ, bzw. Π, oder von zwei Formen des einen Systems mit je einer Form des zweiten Systems.

Wir werden folgendes Schema zur Faltung erhalten:

System I			gefaltet mit	System II		
1.	Ordnung	f		2.	Ordnung	ν
2.	"	θ		4.	"	H
3.	"	K, j, Δ		6.	"	L, σ
4.	"	$N, \theta^2, f\cdot j$		8.	"	$(\nu\sigma x), H^2$
5.	"	$\theta\cdot K$		10.	"	$H\cdot L$
6.	"	$\theta^3, \Delta\cdot j$		12.	"	H^3.

Zur Kontrolle der Rechnung dienen, außer der „doppelten Reduktion“, die beiden speziellen Formen:

I. $f=\sum_3 x_1^3 x_2.\quad a_\nu^2=\frac{i}{6}u_x^2.\quad s=\frac{i}{3}f.\quad a_\eta^2=-\frac{1}{9}i\theta.\quad \Delta_\nu^2=\frac{i}{6}\theta.$
$\sigma=-\frac{i}{6}j.\quad g=-\frac{2}{3}i\Delta.\quad \varrho=0.\quad t=0.$

II. $f=\sum_3 x_1^4.\quad s=\frac{4}{3}if.\quad a_\eta^2=\frac{2}{9}i\theta.\quad \Delta_\nu^2=\frac{1}{15}i\theta.\quad \sigma=\frac{4}{3}ij.\quad g=\frac{4}{3}i\Delta.$
$\varrho=0.\quad t=0.$

Nachbemerkung: Den Formeln (1.), (2.), (3.), (4.) entsprechen für die Grundform ν die folgenden:

$$
(5.)\qquad
\begin{array}{l|l|l}
 & \underline{H_\nu}=\frac{1}{3}u_x\cdot\sigma & \\
\underline{(\nu\eta x)^2}=A & \underline{H_\nu(\nu\eta x)}=0 & \underline{H_\nu^2}=\sigma \\
\underline{(\nu\eta x)^3}=0 & \underline{H_\nu(\nu\eta x)^2}=B & \underline{H_\nu^2(\nu\eta x)}=0 \\
\underline{(\nu\eta x)^4}=g & \underline{H_\nu(\nu\eta x)^3}=0 & \underline{H_\nu^2(\nu\eta x)^2}=C,
\end{array}
$$

$$A=\frac{1}{6}s\cdot\nu-\frac{2}{3}u_x\cdot s_\nu+\frac{2}{3}u_x^2\cdot s_\nu^2-\frac{J}{18}u_x^4,$$
$$B=-\frac{5}{6}s_\nu+\frac{7}{6}u_x\cdot s_\nu^2-\frac{J}{9}u_x^3,$$
$$C=\frac{2}{3}s_\nu^2-\frac{J}{9}u_x^2.$$

$$(6.)\qquad s_\nu^3 u_\nu s_x=\frac{1}{3}u_x\cdot s_\nu^4=\frac{1}{3}J\cdot u_x.$$

$$(7.)\quad \begin{aligned} &\text{a)}\ (\nu\sigma x)^2 = \frac{1}{2}(Hsu)^2 - \frac{2}{5}\nu\cdot s_\nu^2 - \frac{4}{5}u_x\cdot s_\eta(Hsu)^2 + u_x^2\left\{\frac{1}{6}J\cdot\nu - \frac{1}{40}(ss'u)^4\right\},\\ &\text{b)}\ (\nu\sigma x)^3 = -\frac{3}{10}s_\eta(Hsu),\\ &\text{c)}\ (\nu\sigma x)^4 = \frac{21}{10}s_\eta^2 - \frac{3}{10}Z - \frac{6}{5}u_x\cdot s_\eta^3 + \frac{1}{10}u_x^2\cdot s_\eta^4; \end{aligned}$$

$$(8.)\quad \begin{aligned} &\text{a)}\ g_\nu = -s_\eta + u_x\left\{\frac{9}{2}s_\eta^2 - \frac{1}{2}Z\right\} - 3u_x^2\cdot s_\eta^3 + \frac{1}{2}u_x^3\cdot s_\eta^4,\\ &\text{b)}\ g_\nu^2 = \frac{21}{10}s_\eta^2 - \frac{3}{10}Z - 2u_x\cdot s_\eta^3 + \frac{1}{2}u_x^2\cdot s_\eta^4,\\ &\text{c)}\ g_\nu^3 = -\frac{7}{10}s_\eta^3 + \frac{1}{2}u_x\cdot s_\eta^4,\\ &\text{d)}\ g_\nu^4 = \frac{3}{5}s_\eta^4. \end{aligned}$$

§ 8. *Formen dritter Ordnung* (*System III*).

Faltung von f mit ν.

Irreduzible Formen:

$$\begin{matrix} a_\nu & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & a_\nu^2 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & a_\nu^4 = i. \end{matrix}$$

Reduktion: $a_\nu^3 = \frac{1}{3}i u_x$ (Formel (2.)).

Folgerungen: 1) a_ν^3 ist Reduzent.

2) f tritt nur in Produkten mit kontragredienten Formen (j) in Faltung mit ν ein. Das Gleiche gilt für ν in bezug auf f.

§ 9. *Formen vierter Ordnung* (*System III*).

Faltung von θ mit ν.

Irreduzible Formen:

$$\begin{matrix} (\vartheta\nu x) & \theta_\nu & \cdot & \cdot \\ (\vartheta\nu x)^2 & \theta_\nu(\vartheta\nu x) & \theta_\nu^2 & \cdot \\ \cdot & \theta_\nu(\vartheta\nu x)^2 & \cdot & \theta_\nu^3 \end{matrix}$$

Reduktionen: **Aus dem Reduzenten a_ν^3 durch doppelte Reduktion der Ausdrücke $a_\nu^3(abu)$, $a_\nu^3 b_\nu$, $a_\nu^3 b_\nu (abu)$ nach dem Ansatz:**

$$\theta_\nu^2(\vartheta\nu x) = a_\nu^2(\widehat{ab}\nu x)(abu) - \frac{1}{3}(\nu\nu_1 x)^3 = a_\nu b_\nu(\widehat{ab}\nu x)(abu) + \frac{1}{6}(\nu\nu_1 x)^3$$

$$= a_\nu^3(abu) - a_\nu^2 b_\nu(abu) = 2\,a_\nu^2 b_\nu(abu) = \frac{2}{3}a_\nu^3(abu),$$

$$\theta_\nu^2(\vartheta\nu x)^2 = a_\nu^2(\widehat{ab}\nu x)^2 - \frac{1}{3}(\nu\nu_1 x)^4 = a_\nu b_\nu(\widehat{ab}\nu x)^2 + \frac{1}{6}(\nu\nu_1 x)^4$$

$$= i\cdot f - 2\,a_\nu^3 b_\nu + a_\nu^2 b_\nu^2 - \frac{1}{3}s = 2\,a_\nu^3 b_\nu - 2\,a_\nu^2 b_\nu^2 + \frac{1}{6}s = \frac{2}{3}i\cdot f - \frac{2}{3}a_\nu^3 b_\nu - \frac{1}{6}s,$$

$$\theta_\nu^3(\vartheta\nu x) = a_\nu^2 b_\nu(\widehat{ab}\nu x)(abu) = a_\nu^3 b_\nu(abu).$$

Es entstehen die Formeln:

$$(9.)\quad \begin{array}{l|l|l} \underline{\theta_\nu^2(\vartheta\nu x)} = 0 & & \\ \underline{\theta_\nu^2(\vartheta\nu x)^2} = \frac{4}{9}if - \frac{1}{6}s & \underline{\theta_\nu^3(\vartheta\nu x)} = 0 & \underline{\theta_\nu^4 u_\vartheta^2} = u_\varrho^2 = \varrho \end{array} \quad \text{(adj. Modul, § 7).}$$

Folgerungen: **1) $\theta_\nu^2(\vartheta\nu x)^2$ ist Reduzent.**

2) ν tritt nur in Produkten mit kontragredienten Formen (g) in Faltung mit θ ein.

§ 10. *Formen fünfter Ordnung (System III).*

$$\textbf{Faltung von}\ \begin{cases} K,\ j,\ \Delta & \textbf{mit}\ \nu, \\ f & \textbf{mit}\ H. \end{cases}$$

Irreduzible Formen:

A)	$\cdot$	K_ν	$\cdot$	$\cdot$
	$(k\nu x)^2$	$\cdot$	K_ν^2	$\cdot$
	$(k\nu x)^3$	$K_\nu(k\nu x)^2$	$\cdot$	$\cdot$
	$\cdot$	$K_\nu(k\nu x)^3$	$\cdot$	$\cdot$,

B) $(j\nu x)$, $(j\nu x)^2$, $(j\nu x)^3$. ,

C) Δ_ν . . . ,

D)

(aHu)	$(aHu)^2$	.
a_η	$a_\eta(aHu)$	$a_\eta(aHu)^2$
.	a_η^2	. .

Reduktionen:

A) Formenreihe K_ν^3: Reduzent a_ν^3.

Form $K_\nu^2(k\nu x)^2$: Reduzent $\theta_\nu^2(\vartheta\nu x)^2$.

$(k\nu x)$, $K_\nu(k\nu x)$, $K_\nu^2(k\nu x)$ sind zerfallende Formen nach § 3.

B) Form $(j\nu x)^4 \equiv (\widehat{a\theta}\nu x)^4 = a_\nu^4\cdot\theta + \theta_\nu^4\cdot f - 4a_\nu^3\theta_\nu - 4a_\nu\{a_\nu\cdot\theta_x - (\widehat{a\theta}\nu x)\}^3$

$$+6a_\nu^2\{a_\nu\theta_x - (\widehat{a\theta}\nu x)\}^2 = \varrho\cdot f + \frac{5}{3}i\theta - 6a_\nu^2(\widehat{a\theta}\nu x)^2 + 4a_\nu(\widehat{a\theta}\nu x)^3,$$

$$(j\nu x)^4 = \varrho\cdot f + \frac{5}{3}i\theta\cdot \mathrm{mod}(\Delta,\nu), \qquad \text{(vgl. § 5 Schluß).}$$

C) Form Δ_ν^4: Reduzent θ_ν^4.

Formen Δ_ν^2 und Δ_ν^3: Reduzent a_ν^3 oder θ_ν^4 durch Ersetzen der Form Δ durch niedere Formen der Formenreihe (§ 5 Schluß), d. h. durch doppelte Reduktion der Ausdrücke

$$a_\vartheta a_\nu^3, \quad a_\vartheta a_\nu^3\theta_\nu \text{ und } a_\vartheta\theta_\nu^4.$$

Die doppelte Berechnung von Δ_ν^2 gibt Anlaß zur Reduktion der höheren Form a_η^3.

Reduktionsformeln:

$$
(10.)\quad
\begin{aligned}
&\text{a)}\quad \varDelta_\nu^2 = \frac{3}{5}a_\eta^2 - \frac{3}{10}(asu)^2 + \frac{1}{3}\,i\theta + \frac{1}{5}u_x^2\cdot(2a_\varrho^2 - t)'\\
&\text{b)}\quad \varDelta_\nu^3 = -\frac{3}{10}a_\varrho + \frac{3}{5}u_x\left\{\frac{13}{10}a_\varrho^2 - \frac{2}{5}t\right\},\\
&\text{c)}\quad \varDelta_\nu^4 = a_\varrho^2 - \frac{2}{5}t.
\end{aligned}
$$

Ableitung der Formeln:

a) $$a_\vartheta a_\nu^3 = \frac{1}{3}\,i\theta = [a_\vartheta]_{\nu^3} + \frac{6}{7}[a_\vartheta^2]_{\nu^2} + \frac{6}{5}[a_\vartheta(a\theta u)^2]_\nu\,\widehat{\nu x}^2 + \frac{11}{30}[a_\vartheta^2(a\theta u)^2]\,\widehat{\nu x}^2$$

$$-\frac{6}{7}u_x\cdot[a_\vartheta^2]_\nu^3 - \frac{1}{6}u_x\cdot[a_\vartheta^2(a\theta u)^2]_\nu\,\widehat{\nu x}^2,$$

$$\frac{1}{3}\,i\theta = \varDelta_\nu^2 - \frac{2}{3}u_x\cdot\varDelta_\nu^3 - a_\nu a_{\nu_1}(\nu\nu_1 x)^2 + \frac{2}{5}a_\nu^2(\nu\nu_1 x)^2 + \frac{1}{5}u_x\cdot a_\nu^2 a_{\nu_1}(\nu\nu_1 x)^2;$$

b) $$a_\vartheta a_\nu^3\theta_\nu = 0 = [a_\vartheta]_{\nu^4} + \frac{9}{14}[a_\vartheta^2]_{\nu^3} + \frac{3}{5}[a_\vartheta(a\theta u)^2]_{\nu^2}\,\widehat{\nu x}^2 + \frac{17}{120}[a_\vartheta^2(a\theta u)^2]_\nu\,\widehat{\nu x}^2$$

$$-\frac{9}{14}u_x\cdot[a_\vartheta^2]_{\nu^4} - \frac{1}{24}u_x\cdot[a_\vartheta^2(a\theta u)^2]_{\nu^2}\,\widehat{\nu x}^2,$$

$$0 = \frac{5}{6}\varDelta_\nu^3 - \frac{1}{2}u_x\cdot\varDelta_\nu^4 - \frac{1}{4}a_\eta^3 + \frac{1}{20}u_x\cdot a_\eta^4;$$

b′) $$a_\vartheta\theta_\nu^4 = a_\varrho = a_\vartheta\theta_\nu\,\{a_\nu - (a\theta\widehat{\nu x})\}^3$$

$$= -\frac{3}{2}[a_\vartheta^2]_{\nu^3} + \frac{3}{5}[a_\vartheta(a\theta u)^2]_{\nu^2}\,\widehat{\nu x}^2 - \frac{37}{120}[a_\vartheta^2(a\theta u)^2]_\nu\,\widehat{\nu x}^2$$

$$+\frac{3}{2}u_x\cdot[a_\vartheta^2]_{\nu^4} + \frac{49}{120}u_x\cdot[a_\vartheta^2(a\theta u)^2]_{\nu^2}\,\widehat{\nu x}^2,$$

$$a_\varrho = -\frac{3}{2}\varDelta_\nu^3 + \frac{3}{2}u_x\cdot\varDelta_\nu^4 - \frac{11}{20}a_\eta^3 + \frac{7}{20}u_x\cdot a_\eta^4;$$

c) $$a_\vartheta^2\theta_\nu^4 = a_\varrho^2 = [a_\vartheta^2]_{\nu^4} + \frac{3}{5}[a_\vartheta^2(a\theta u)^2]_{\nu^2}\,\widehat{\nu x}^2,$$

$$a_\varrho^2 = \varDelta_\nu^4 + \frac{2}{5}a_\eta^4.$$

D) **Reduktion von a_η^3 durch doppelte Reduktion von $\varDelta_\nu^3$ (C).**

Die übrigen Reduktionen durch Rechnung, die der in § 9 dualistisch entgegengesetzt ist.

Reduktionsformeln:

(11.)

$\underline{a_\eta^2(aHu)} = -\frac{1}{6}(asu)^3$	$\underline{a_\eta^2(aHu)^2} = \frac{4}{9}i\nu - \frac{1}{6}(asu)^4$,
$\underline{a_\eta^3} = -a_\varrho + \frac{3}{5}u_x \cdot a_\varrho^2 + \frac{1}{5}u_x \cdot t$,	$\underline{a_\eta^3(aHu)} = 0$,
	$\underline{a_\eta^4} = t$ (als Modul adjungiert).

Folgerungen:

1) $(j\nu x)^4$, $\varDelta_\nu^2$, $a_\eta^2(aHu)$ sind Reduzenten.

2) ν tritt nur in Produkten mit kontragredienten Formen in Faltung mit $K, j, \varDelta$ ein; das gleiche gilt von f in bezug auf H und von j in bezug auf ν, da $\theta_\nu(\vartheta \cdot j, \nu, x)^3$ nach § 11 B reduzibel wird.

§ 11. *Formen sechster Ordnung (System III).*

Faltung von $\begin{cases} \theta^2,\ f \cdot j,\ N \text{ mit } \nu, \\ \theta \qquad\qquad\ \text{mit } H. \end{cases}$

Irreduzible Formen:

A) $(\vartheta^2\nu x)^3$ · $\theta_\nu(\vartheta^2\nu x)^3$, B) $a_\nu(j\nu x)$ · $a_\nu^2(j\nu x)$, C) N_ν,

D)

·	(θHu)	$(\theta Hu)^2$	·
$(\vartheta\eta x)$	θ_η	$H_\vartheta(\theta Hu)$, $\theta_\eta(\theta Hu)$	$\theta_\eta(\theta Hu)^2$
$(\vartheta\eta x)^2$	$H_\vartheta(\vartheta\eta x)$, $\theta_\eta(\vartheta\eta x)$	θ_η^2	$\theta_\eta^2(\theta Hu)$
·	$\theta_\eta(\vartheta\eta x)^2$	·	·

Reduktionen:

A) $(\vartheta^2\nu x)^4$ zerfällt nach Formel (3.)a:

$$(a\varDelta\widehat{\vartheta x})^2 = \frac{1}{2}(\vartheta^2\nu x)^4 - \frac{3}{5}f \cdot a_\nu^2(\nu\vartheta x)^2 = \frac{1}{3}\varDelta^2 + f \cdot \varDelta_\vartheta^2.$$

B) $a_\nu (j\nu x)^2$ **zerfällt nach Formel (9.)a, indem wir nach § 6 Schluß $f \cdot j$ durch $(\theta\theta' u)^2$ ersetzen, und die Reduzibilität von θ'_ϑ beachten:**

$$\frac{1}{3} a_\nu (j\nu x)^2 = (\widehat{\theta\theta'} \nu x)^2 \theta_\nu = \theta^3_\nu \cdot \theta - \theta^2_\nu \theta'_\nu = \theta^3_\nu \cdot \theta + \theta^2_\nu (\widehat{\vartheta \nu}\, \theta' u) = \theta^3_\nu \cdot \theta - \frac{2}{3} \theta^3_\nu \cdot \theta.$$

Formen $a_\nu (j\nu x)^3$ und $a^2_\nu (j\nu x)^2$: Reduzent a_j und $(j\nu x)^4$:

$$a_\nu (j\nu x)^3 = a_j (j\nu x)^3 - (j\nu x)^3 (j\nu \widehat{au}),$$

$$a^2_\nu (j\nu x)^2 = a^2_j (j\nu x)^2 - 2\, a_j (j\nu x)^2 (j\nu \widehat{au}) + (j\nu x)^2 (j\nu \widehat{au})^2.$$

C) Formenreihe N^2_ν; Reduzent Δ^2_ν.
$(n\nu x)$ und $N_\nu (n\nu x)$ zerfallen als Überschiebung über Funktionaldeterminanten nach § 3.

D) *Übersicht über die Reduktionen:*

a) Formenreihe $\theta^2_\eta H_\vartheta$: Reduzent $a^2_\eta (aHu)$. (Führt auf Formen mit höheren Symbolen.)

b) Formenreihe $\theta_\eta H_\vartheta$: Reduzent $a^2_\eta (aHu)$ durch doppelte Reduktion. (Führt auf Formen mit höheren Symbolen und auf höhere Formen der Gesamtformenreihe, d. h. auf die Formenreihe θ^2_η.) Wir betrachten an Stelle von $\theta_\eta H_\vartheta$ die Formenreihe $\theta_\eta (\vartheta \eta x)(\theta H u) = \theta_\eta H_\vartheta + \theta^2_\eta$, ersetzen darin die Symbole θ durch die niedere Form (abu), gelangen so zur doppelten Reduktion der Formenreihe $a^2_\eta (aHu)(abu) = \theta_\eta H_\vartheta + \frac{3}{2} \theta^2_\eta$ mod s bis zur Endform $a^3_\eta b_\eta (bHu)(abu) = \theta^3_\eta H_\vartheta + \frac{1}{2} \theta^4_\eta$.

c) Formenreihe θ^3_η: Durch doppelte Reduktion derjenigen Formen, die zugleich den Formenreihen $\theta_\eta H_\vartheta$ und $\theta^2_\eta H_\vartheta$ angehören — d. h. der Formen der Formenreihe $\theta^2_\eta H_\vartheta$ — auf Formen mit höheren Symbolen einerseits, auf Formen mit höheren Symbolen und auf die höhere Formenreihe θ^3_η andererseits.

d) Formen $\theta^2_\eta (\vartheta \eta x)$, $\theta^2_\eta (\vartheta \eta x)^2$, $\theta^3_\eta (\vartheta \eta x)$: Durch doppelte Reduktion mittelst des Reduzenten a analog der Rechnung von § 9.

e) Formen $\theta_\eta^2(\theta H u)^2$ und $\theta_\eta^2(\vartheta \eta x)^2$: Durch doppelte Reduktion der Ausdrücke $\varDelta_\nu^2(a\varDelta u)^4$ und $(a\varDelta \widehat{\nu x})^4$ mittelst der Reduzenten $\varDelta_\nu^2$ und $(a\varDelta u)^4$.

f) Formen H_ϑ und H_ϑ^2: Zerfallende Formen. Ergibt sich bei H_ϑ^2 durch doppelte Reduktion des Ausdrucks $\varDelta_\nu^2(a\varDelta u)^2$ oder auch durch direkte Berechnung der Produkte $(a_\nu^2)^2$, $a_\nu^2 \cdot b_{\nu_1}$ durch Formen des Systems. (Die analoge Berechnung von $(a_\nu)^2$ gibt eine Relation zwischen zerfallenden Formen.)

g) Reduktion höherer Formen dadurch, daß Formen der Formenreihe $\theta \cdot H$ zwei Reduktionsmöglichkeiten zulassen (zwei reduziblen Formenreihen angehören) und zwar:

g durch doppelte Reduktion von $\theta_\eta^2(\vartheta \eta x)^2$: läßt Reduktion d) und e) zu;

$s_\vartheta^2(\theta s u)$ durch doppelte Reduktion von $\theta_\eta^3(\vartheta \eta x)$: läßt Reduktion c) und d) zu

$s_\vartheta^2(\theta s u)^2$ durch doppelte Reduktion von $\theta_\eta^2 H_\vartheta^2$: läßt Reduktion a) zu und hat Reduzent $\theta_\nu^2(\vartheta \nu x)^2$ zum Faktor;

s_ν^2 durch doppelte Reduktion von $\theta_\eta^3 H_\vartheta$: läßt Reduktion a) und c) zu.

Der Nachweis der Unabhängigkeit der übrigen Formen ergibt sich durch doppelte Reduktion der Formenreihe $\varDelta_\nu^2(a\varDelta u)^2 \equiv \theta_\eta^2$.

Ausführung der Reduktionen:

Die Existenz der Reduktionen a), b), c), d) ist a priori klar, da nach dem angegebenen Bildungsgesetz die bei der doppelten Reduktion entstehenden Relationen von einander unabhängig sind. Bei den Reduktionen e), f), g) ist durch Rechnung nachzuweisen, daß keine Identitäten entstehen.

Wir geben, symmetrisch zum Diagonalglied in der Formenreihe $\theta \cdot H$ bis zur Form θ_η vorangehend, teilweise mit Andeutung der Rechnung, auch die durch Reduktion a), b), c), d) gewonnenen Formeln, da sie zum Teil bei Reduktion e), f), g), zum Teil später Anwendung finden.

1) H_ϑ und H_ϑ^2 nach f). Nach dem Ansatz*)

$$a_\nu \cdot b_{\nu_1}^2 = \nu \cdot a_\nu b_\nu^2 - (aHu)(bHu) b_\eta \frown \nu \cdot a_\nu b_\nu^2 - f \cdot a_\eta (aHu)^2 - (abu)(aHu) b_\eta + (abu)^2 b_\eta,$$

$$a_\nu^2 \cdot b_{\nu_1}^2 = b_{\nu_1}^2 \{a_{\nu_1} u_\nu - (a\widehat{\nu\nu_1}u)\}^2 \frown \nu \cdot a_\nu^2 b_\nu^2 - 2 a_\eta b_\eta (aHu)(bHu) - \frac{1}{6}(asu)^2 (bsu)^2$$

$$\frown \nu \cdot a_\nu^2 b_\nu^2 - 2 a^2 (aHu)(abu) - \frac{1}{6}(asu)^2 (bsu)^2 + (\vartheta\eta x)^2 (\theta Hu)^2$$

entstehen unter Eintragung des Wertes von $\theta_\eta H_\vartheta$ die Formeln:

$$\text{(12.)} \quad \begin{aligned} &\text{a)}\ H_\vartheta \frown 2 a_\nu \cdot a_\nu^2 + 2\nu \cdot \theta_\nu (\vartheta\nu x)^2 + 2 f \cdot a_\eta (aHu)^2 - 2\theta_\eta, \\ &\text{b)}\ H_\vartheta^2 \frown (a_\nu^2)^2 + 2\theta_\eta^2 + \frac{2}{3}(\theta su)^2 + \frac{1}{12} s \cdot \nu - \frac{1}{9} if \cdot \nu - \frac{1}{6} f \cdot (asu)^4. \end{aligned}$$

2) $\theta_\eta H_\vartheta$ nach b):

$$a_\eta^2 (aHu)(abu) \frown [a_\eta^2 (aHu)]_{\widehat{bu}} + \frac{1}{2} f \cdot [a_\eta^2 (aHu)^2] = a_\eta b_\eta (aHu)(abu)$$

$$+ a_\eta (\widehat{ab}\eta x)(abu)(aHu) \frown \theta_\eta (\vartheta\eta x)(\theta Hu) + \frac{1}{2}\theta_\eta^2 + \frac{1}{4}(\nu\eta x)^2.$$

Nach den Formeln (5.) und (11.) folgt:

$$\theta_\eta H_\vartheta \frown -\frac{3}{2}\theta_\eta^2 - \frac{1}{4}(\theta su)^2 - \frac{1}{12} s \cdot \nu + \frac{2}{9} if \cdot \nu.$$

3) $\theta_\eta H_\vartheta (\theta Hu)$ berechnet sich nach b) analog wie $\theta_\eta H_\vartheta$:

$$\theta_\eta H_\vartheta (\theta Hu) \frown -\theta_\eta^2 (\theta Hu) - \frac{1}{6}(\theta su)^3.$$

4) $\theta_\eta H_\vartheta (\vartheta\eta x)$ nach b); $\theta_\eta^2 (\vartheta\eta x)$ nach d) (vgl. § 9):

$$\theta_\eta H_\vartheta (\vartheta\eta x) \frown -\theta_\eta^2 (\vartheta\eta x) - \frac{1}{6} s_\vartheta (\theta su) \frown \frac{1}{3}(\vartheta\varrho x) - \frac{1}{6} s_\vartheta (\theta su),$$

$$\theta_\eta^2 (\vartheta\eta x) \frown \frac{2}{3} a_\eta^3 (abu) \frown -\frac{1}{3}(\vartheta\varrho x).$$

*) Das Zeichen $\frown$ an Stelle des Gleichheitszeichens bedeutet, daß Produkte aus u_x mit höheren Formen, als die durch Faltung III und IV entstehenden, ausgelassen sind.

5) $\theta_\eta H_\vartheta^2$ **nach b),** $\theta_\eta^2 H_\vartheta$ **nach a),**
aus $a_\eta^2(aHb)(bHu)$; **aus** $a_\eta^2(Hab)(abu)$;

$\theta_\eta^2 H_\vartheta$ **nach b) und dadurch** θ_η^3 **nach c),**
aus $a_\eta^3(bHu)(abu)$:

$$\theta_\eta H_\vartheta^2 \backsim -\frac{3}{2}\theta_\eta^2 H_\vartheta - \frac{1}{4}s_\vartheta(\theta s u)^2 + \frac{1}{6}s_\nu - \frac{4}{9}i\,a_\nu \backsim -\theta_\varrho - \frac{1}{6}s_\nu - \frac{1}{9}i\,a_\nu,$$

$$\theta_\eta^2 H_\vartheta \backsim \frac{2}{3}\theta_\varrho - \frac{1}{6}s_\vartheta(\theta s u)^2 + \frac{2}{9}s_\nu - \frac{2}{9}i\,a_\nu,$$

$$\theta_\eta^2 H_\vartheta \backsim \frac{2}{3}\theta_\varrho - \frac{2}{3}\theta_\eta^3 + \frac{5}{36}s_\nu \text{ und daraus}$$

$$\theta_\eta^3 \backsim \frac{1}{4}s_\vartheta(\theta s u)^2 - \frac{1}{8}s_\nu + \frac{1}{3}i\cdot a_\nu.$$

6) $\theta_\eta^2(\theta H u)^2$ **nach e):**

$$\varDelta_\nu^2(a\varDelta u)^4 = [(a\varDelta u)^4]_\nu = -\frac{12}{5}\theta_\eta^2(\theta H u)^2 - \frac{3}{10}\sigma - \frac{1}{20}(\theta s u) + \nu\cdot\varrho$$
(nach Formel (3.) c),

$$\varDelta_\nu^2(a\varDelta u)^4 = [\varDelta_\nu^2]_{\widehat{sa}}{}^4 = \frac{3}{5}\theta_\eta^2(\theta H u)^2 + \frac{1}{5}\sigma - \frac{3}{10}(\theta s u)^4 + \frac{1}{3}ij$$
(nach Formel (10.) a),

$$\theta_\eta^2(\theta H u)^2 = -\frac{1}{6}\sigma + \frac{1}{12}(\theta s u)^4 - \frac{1}{9}ij + \frac{1}{3}\nu\cdot\varrho.$$

7) $\theta_\eta^2(\vartheta\eta x)^2$ **nach d) und e). Daraus Reduktion der höheren Form** g.

Nach analoger Rechnung wie in § 9 folgt:

$$\theta_\eta^2(\vartheta\eta x)^2 = \frac{1}{2}t\cdot f - \frac{1}{2}a_\eta^2 b_\eta - \frac{1}{12}g = \frac{2}{3}t\cdot f - \frac{2}{3}a_\eta^3 b_\eta - \frac{1}{6}g$$

$$= -\frac{1}{6}g - \frac{1}{3}(\vartheta\varrho x)^2 + \frac{4}{15}f\cdot a_\varrho^2 + \frac{8}{15}f\cdot t \quad \text{(nach Formel (11.)).}$$

Nach entsprechender Rechnung wie oben folgt:

$$(a\Delta\widehat{\nu x})^4 = [(a\Delta u)^4]\widehat{\nu x}^4 = \frac{21}{10}\theta_\eta^2(\vartheta\eta x)^2 + \frac{7}{10}s_\vartheta^2 - \frac{3}{10}g,$$
(nach Formel (3.) c),

$$(a\Delta\widehat{\nu x})^4 = -\frac{1}{3}i\Delta + 6[\Delta_\nu^2]a^2 - 4[\Delta_\nu^3]a + \Delta_\nu^4\cdot f$$

$$= -\frac{36}{5}\theta_\eta^2(\vartheta\eta x)^2 - \frac{9}{5}s_\vartheta^2 - \frac{3}{5}g - \frac{3}{5}(\vartheta\varrho x)^2 + \frac{5}{3}i\Delta + \frac{37}{25}f\cdot a_\varrho^2 + \frac{74}{25}f\cdot t,$$
(nach Formel (10.)):

$$\frac{93}{10}\theta_\eta^2(\vartheta\eta x)^2 = -\frac{3}{10}g - \frac{5}{2}s_\vartheta^2 - \frac{3}{5}(\vartheta\varrho x)^2 + \frac{5}{3}i\Delta + \frac{37}{25}f\cdot a_\varrho^2 + \frac{74}{25}f\cdot t,$$

und durch Vergleichen der beiden Werte von $\theta_\eta^2(\vartheta\eta x)^2$ nach g):

$$(13.)^{*)}\qquad 0 = g - 2s_\vartheta^2 + 2(\vartheta\varrho x)^2 + \frac{4}{3}i\Delta - \frac{4}{5}f\cdot a_\varrho^2 - \frac{8}{5}f\cdot t.$$

8) $\theta_\eta^2 H_\vartheta(\theta H u)$ nach a) und b), daraus $\theta_\eta^3(\theta H u)$ nach c) (Formen mit dem Faktor u_x verschwinden):

$$\theta_\eta^2 H_\vartheta(\theta H u) = -\frac{1}{6}s_\vartheta(\theta s u)^3 - \frac{1}{3}(\nu\varrho x),$$

$$\theta_\eta^2 H_\vartheta(\theta H u) = -\frac{1}{3}\theta_\eta^3(\theta H u) - \frac{1}{3}(\nu\varrho x),$$

$$\theta_\eta^3(\theta H u) = \frac{1}{2}s_\vartheta(\theta s u)^3.$$

9) $\theta_\eta^2 H_\vartheta(\vartheta\eta x)$ nach a) und b), daraus $\theta_\eta^3(\vartheta\eta x)$ nach c). $\theta_\eta^3(\vartheta\eta x)$ nach d), daraus Reduktion der höheren Form $s_\vartheta^2(\theta s u)$ nach g) (Formen mit dem Faktor u_x verschwinden):

---

*) Es ist dies die in der Anmerkung zur Einleitung erwähnte Relation zwischen den drei Kovarianten 6. Ordnung und 6. Grades.

$$\theta_\eta^2 H_\vartheta(\vartheta\eta x) = \frac{1}{3}(atu),$$

$$\theta_\eta^2 H_\vartheta(\vartheta\eta x) = \frac{1}{3}(atu) + \frac{1}{3}\theta_\eta^3(\vartheta\eta x) - \frac{1}{6}s_\vartheta^2(\theta s u),$$

$$\theta_\eta^3(\vartheta\eta x) = \frac{1}{2}s_\vartheta^2(\theta s u),$$

$$\theta_\eta^3(\vartheta\eta x) = \frac{2}{5}\theta_\varrho(\vartheta\varrho x) + \frac{1}{5}(atu):$$

$$(14.)\qquad s_\vartheta^2(\theta s u) = \frac{4}{5}\theta_\varrho(\vartheta\varrho x) + \frac{2}{5}(atu).$$

10) $\theta_\eta^2 H_\vartheta^2$ **nach a) und durch Reduzent** $\theta_\nu^2(\vartheta\nu x)^2$, $\theta_\eta^3 H_\vartheta$ **nach a) und c),** θ_η^4 **nach c), daraus Reduktion der höheren Formen** $s_\vartheta^2(\theta s u)^2$ **und** s_ν^2 **nach g):**

Nach a) $$\theta_\eta^2 H_\vartheta^2 = [a_\eta^2(aHu)^2]b^2 + \frac{1}{3}[a_\eta^4]_{\widehat{bu^2}} - \frac{1}{3}H_\nu^2(\nu\eta x)^2$$
$$= \frac{4}{9}i\cdot a_\nu^2 - \frac{1}{6}s_\vartheta^2(\theta s u)^2 - \frac{5}{18}s_\nu^2 + \frac{1}{3}(atu)^2 + \frac{1}{54}J\cdot u_x^2.$$

Durch $\theta_\nu^2(\dot\vartheta\nu x)^2$. $$\theta_\eta^2 H_\vartheta^2 = [\theta_\nu^2(\vartheta\nu x)^2]_{\nu_1^2} + \frac{1}{3}[\theta_\nu^4]\widehat{\nu_1}x^2 - \frac{1}{3}s_\vartheta^2(\theta s u)^2$$
$$= \frac{4}{9}i\cdot a_\nu^2 - \frac{1}{6}s_\nu^2 - \frac{1}{3}s_\vartheta^2(\theta s u)^2 + \frac{1}{3}(\nu\varrho x)^2.$$

Nach a) $$\theta_\eta^3 H_\vartheta = -[a_\eta^2(aHu)]_{\widehat{bu}}b^2 - \frac{1}{2}[a_\eta^2(aHu)^2]b^2 - \frac{1}{3}[a_\eta^3]_{\widehat{bu^2}}b + \frac{1}{18}[a_\eta^4]_{\widehat{bu^3}}$$
$$+ \frac{1}{2}u_x\cdot[a_\eta^2(aHu)^2]b^3$$
$$= -\frac{2}{9}ia_\nu^2 + \frac{1}{12}s_\nu^2 + \frac{4}{15}\theta_\varrho^2 - \frac{7}{90}(\nu\varrho x)^2 + \frac{1}{30}(atu)^2 + \frac{2}{27}i^2\cdot u_x^2 - \frac{1}{36}J\cdot u_x^2.$$

Nach *c)* $\theta_\eta^3 H_\vartheta$: $$a_\eta^3(Hab)(bHu) = \frac{1}{2}(atu)^2 = \theta_\eta^2 H_\vartheta(\theta Hu)(\vartheta\eta x) + \frac{1}{4}H_\nu^2(\nu\eta x)^2$$
$$+ \frac{1}{2}\theta_\eta^2 H_\vartheta^2 = \frac{3}{2}\theta_\eta^2 H_\vartheta^2 + \theta_\eta^3 H_\vartheta - u_x\cdot[a_\eta^2(aHu)^2]b^3 + \frac{1}{4}H_\nu^2(\nu\eta x)^2,$$

$$\theta_\eta^3 H_\vartheta = -\frac{2}{3} i \cdot a_\nu^2 + \frac{5}{12} s_\nu^2 + \frac{1}{2}(\nu \varrho x)^2 - \frac{1}{2}(a t u)^2 + \frac{4}{27} i^2 \cdot u_x^2 - \frac{1}{12} J \cdot u_x^2.$$

Nach c) $$\theta_\eta^4 = \frac{4}{9} i a_\nu^2 - \frac{1}{6} s_\nu^2 + \frac{16}{15}\theta_\varrho^2 - \frac{14}{45}(\nu\varrho x)^2 + \frac{2}{15}(a t u)^2.$$

Nach g) aus den zwei Werten für $\theta_\eta^2 H_\vartheta^2$:

$$(15.)\quad \begin{aligned} s_\vartheta^2(\theta s u)^2 &= \frac{2}{3} s_\nu^2 - 2(a t u)^2 + 2(\nu\varrho x)^2 - \frac{1}{9} J \cdot u_x^2 \\ &= \frac{8}{9} i \cdot a_\nu^2 + \frac{8}{15}\theta_\varrho^2 - \frac{14}{15}(a t u)^2 + \frac{38}{45}(\nu\varrho x)^2 - \frac{4}{27} i^2 \cdot u_x^2. \end{aligned}$$

Nach g) aus den zwei Werten für $\theta_\eta^3 H_\vartheta$:

$$(16.)\quad s_\nu^2 = \frac{4}{3} i \cdot a_\nu^2 + \frac{4}{5}\theta_\varrho^2 + \frac{8}{5}(a t u)^2 - \frac{26}{15}(\nu\varrho x)^2 + \frac{1}{6} J \cdot u_x^2 - \frac{2}{9} i^2 \cdot u_x^2.$$

Formel (16.) gibt die Grundlage zur Reduktion des Moduls $(s s' u)^4$, Formel (13.) zur Reduktion des Systems von s. (§ 17.)

Folgerungen:

1) $a_\nu (j\nu x)^3$, $\theta_\eta H_\vartheta$, $\theta_\eta^2(\vartheta\eta x)$, $\theta_\eta^2(\theta H u)^2$ sind Reduzenten, $a_\nu (j\nu x)^2$, H_ϑ und H_ϑ^2 zerfallende Formen.

2) Die Form des Systems II: $j(\nu) = g = (\nu\eta x)^4 H_x^2$ ist reduzibel.

3) ν tritt, da die einzige kontragrediente Form g reduzibel wird, überhaupt nicht in Potenzen oder in Produkten mit Formen des gleichen Systems in Faltung mit System I ein.

θ tritt nur als Kontravariante betrachtet in Produkten oder Potenzen in Faltung ein, und entsprechend H als Kovariante betrachtet (vgl. § 13 B).

§ 12. *Formen siebenter Ordnung.*

$$\text{Faltung von} \begin{cases} \theta \cdot K \text{ mit } \nu, \\ K,\ j,\ \Delta \text{ mit } H, \\ f \text{ mit } L,\ \sigma. \end{cases}$$

Irreduzible Formen:

$$\text{B)}\quad \begin{array}{c|c|c|c} \cdot & \cdot & (KHu)^2 & \cdot \\ \cdot & K_\eta & \cdot & K_\eta(KHu)^2 \\ (k\eta x)^2 & \cdot & K_\eta^2 & \cdot \\ (k\eta x)^3 & H_k(k\eta x)^2,\ K_\eta(k\eta x)^2 & \cdot & \cdot \\ \cdot & K_\eta(k\eta x)^3 & \cdot & \cdot \end{array},$$

$$\text{C)}\quad \begin{array}{ccc} (j\eta x) & H_j & \cdot \\ \cdot & H_j(j\eta x) & H_j^2, \end{array} \qquad \text{D)}\quad \begin{array}{c} (\varDelta Hu) \\ \varDelta_\eta, \end{array}$$

$$\text{E)}\quad \begin{array}{cccc} \cdot & (aLu)^2 & (aLu)^3 & \cdot \\ a_l & \cdot & a_l(aLu)^2 & a_l(aLu)^3 \\ \cdot & a_l^2 & \cdot & \cdot \end{array}.$$

Reduktionen:

A) $(\vartheta \cdot k, \nu, x)^4$ zerfällt als einmalige Überschiebung über die zerfallende Form $(\vartheta^2 \nu x)^4$.

B) Formenreihe $H_k K_\eta$: Reduzent $H_\vartheta \theta_\eta$.
Formenreihe $K_\eta^2(KHu)$: Reduzent $a_\eta^2(aHu)$.
Formenreihe $K_\eta^2(k\eta x)$: Reduzent $\theta_\eta^2(\vartheta\eta x)$.

Die daraus sich ergebende doppelte Reduktion der Formenreihe K_η^3 gibt Anlaß zur Reduktion der höheren Formenreihe $(j\eta x)^3$.

(KHu), $(k\eta x)$, $K_\eta(k\eta x)$ zerfallende Formen nach § 3.

$H_k(KHu)$, $K_\eta(KHu)$ zerfallen als entstanden durch einmalige Faltung mit der zerfallenden Form $K_\nu(k\nu x)$ und der Funktionaldeterminante $K_\nu^2 \equiv \theta_\nu^2(a\theta u) \equiv a_\nu^2(a\theta u)$ mod ν^2.

Der doppelten Darstellung von K_ν^2 entspricht eine Relation zwischen zerfallenden Formen.

Es wird:

$$H_k(KHu) = 2\,K_{\nu_1}(\nu\nu_1 k) = 2\,\theta_{\nu_1}(\nu\nu_1 \widehat{a\theta}) = 2\,\theta_\nu^2 \cdot a_\nu - a_\nu^2 \cdot \theta_\nu + f \cdot \theta_\eta(\theta Hu)^2$$
$$- f \cdot \nu \cdot \theta_\nu^3 \text{ (Produktsatz) mod } (\nu^3),$$

$$K_\eta(KHu) = -K_\nu^2(\nu\nu_1 x) = -a_\nu^2(a\theta u)(\nu\nu_1 x) = -\theta_\nu^2(a\theta u)(\nu\nu_1 x)$$
$$= a_\eta(aHu)^2\cdot\theta + a_\nu^2\cdot\theta_\nu = -\theta_\eta(\theta Hu)^2\cdot f - \theta_\nu^2\cdot a_\nu:$$

$$(17.)^{*})\quad 0 = a_\nu^2\cdot\theta_{\nu_1} + \theta_\nu^2\cdot a_{\nu_1} + f\cdot\theta_\eta(\theta Hu)^2 + \theta\cdot a_\eta(aHu)^2 \bmod (\nu^3).$$

Die Formen H_k, $H_k(k\eta x)$, H_k^2, $H_k^2(k\eta x)$ zerfallen als entstanden durch einmalige Faltung mit den zerfallenden Formen H_ϑ und H_ϑ^2 (vgl. § 3. 2), a) und b)).

Es ist $H_k = H_\vartheta(a\theta u) \sim [H_\vartheta]_{\widehat{ua}} - f\cdot H_\vartheta(\theta Hu)$. (Spezialisierung $y = \widehat{uv}$ von 2) a).

$$H_k(k\eta x) = H_\vartheta a_\eta - H_\vartheta\theta_\eta\cdot f,\quad H_\vartheta a_\eta = \frac{5}{4}[H_\vartheta]a - \frac{1}{4}H_\vartheta a_\vartheta,\quad (\S\ 3.\ 2)\ b).$$

$$H_\vartheta^2(a\theta u) = [H_\vartheta^2]_{\widehat{ua}},\quad H_\vartheta^2 a_\eta = [H_\vartheta^2]a = H_k^2(k\eta x) + H_\vartheta^2\theta_\eta\cdot f.$$

C) Formenreihe $(j\eta x)^3$: Reduzibel durch doppelte Reduktion der Formenreihe K_η^3 nach B); nach dem Ansatz:

$$0 = a_\eta^3(a\theta u) = \theta_\eta^3(a\theta u) = \{\theta_\eta + (\widehat{a\theta}\eta x)\}^3(a\theta u) - \theta_\eta^3(a\theta u)$$
$$= \frac{1}{2}(j\eta x)^3 \bmod (\nu^3, s, \varrho, t, \imath, J).\quad (\text{Vgl. § 5 Schluß.})$$

Der analoge Ansatz gilt bis zur Schlußform der Formenreihe:

$$0 = H_\vartheta^2(\widehat{a\theta}\eta x)a_\eta^3 = H_\vartheta^2(\widehat{a\theta}\eta x)\theta_\eta^3 = \frac{1}{2}H_j^2(j\eta x)^4 \bmod (\nu^3, s, \varrho, t, i, J).$$

Form $(j\eta x)^2$: Zerfällt 1) durch zweimalige Polarisation der Relation für die zerfallende Form H_ϑ^2 ((12.) b);

2) durch direkte Berechnung des Produktes $a_\nu\cdot\theta_\nu^3$; dadurch Zerfallen der höheren Form $(\Delta Hu)^2$. Es wird:

*) Produkte von Formen, unter denen eine Kontravariante ist, wie in diesem Fall $f\cdot\theta_\nu^2\cdot\nu$, sind bei allen Relationen zwischen zerfallenden Formen weggelassen, da sie bei der Anwendung der Formeln bei System s_{IV} keine Bedeutung haben.

$$(18.)\quad \left.\begin{aligned} a)\ & \tfrac{1}{3}(\Delta H u)^2 + \tfrac{1}{3}(j\eta x)^2 = \theta_\nu^2 \cdot a_{\nu_1}^2, \\ b)\ & (j\eta x)^2 = \tfrac{4}{3}\theta_\nu^3 \cdot a_{\nu_1} \end{aligned}\right\} \mod (\nu^3, s, \varrho, t, i, J)$$

nach dem Ansatz:

$$H_\vartheta^2(a\theta u)^2 = \frac{1}{3}(\Delta H u)^2 = 2\,\theta_\eta^2(a\theta u)(aHu) + \theta_\nu^2 \cdot a_{\nu_1}^2 \text{ (Produktsatz)}$$
$$= (a\theta u)(aHu)\,\{a_\eta - (\widehat{a\theta}\eta x)\}^2 + \theta_\nu^2 \cdot a_{\nu_1}^2,$$

$$a_{\nu_1}\cdot\theta_\nu^3 = -(a\widehat{\nu\nu_1}u)\,\theta_\nu^2(\theta\widehat{\nu\nu_1}u) - \frac{1}{2}(a\widehat{\nu\nu_1}u)\theta_\nu\theta_{\nu_1}(\theta\widehat{\nu\nu_1}u) = -\frac{3}{2}\theta_\eta^2(\theta Hu)(aHu)$$
$$= -\frac{3}{2}\theta_\eta^2(\theta Hu)(a\theta u) = -\frac{3}{2}(a_\eta - (\widehat{a\theta}\eta x))^2\{(aHu) - (a\theta u)\}(a\theta u).$$

D) Formenreihe $\Delta_\eta(\Delta H u)$: Reduzent Δ_ν^2.
$(\Delta H u)^2$ zerfallende Form nach C).

E) Formenreihe $a_l^2(aLu)$: Reduzent $a_\eta^2(aHu)$.
Formen (aLu) und $a_l(aLu)$: Zerfallen als Überschiebungen über Funktionaldeterminanten nach § 3.

F) Formenreihe a_σ^3: Reduzent a_η^3.
Formen a_σ^2 und a_σ^3: Reduzent a_ν^3 und a_η^3 durch doppelte Reduktion der entsprechenden Ausdrücke

$$H_\nu a_\nu^3 \text{ und } H_\nu a_\eta^3,\ H_\nu a_\nu^3 a_\eta \text{ und } H_\nu a_\eta^4$$
(vgl. § 10. C) Reduktion von Δ_ν^2 und Δ_ν^3).

Daraus Reduktion für die höheren Formen $a_\nu s_\nu (asu)^2$, $a_\nu^2 s_\nu (asu)^2$ und für Formen in Symbolen $\varrho, t\,(a_\nu a_\varrho^2)$ unter Berücksichtigung von (16.):

$$(19.)\quad \left.\begin{aligned} & a_\nu s_\nu (asu)^2 = \frac{1}{3} i\theta_\nu^2 - \frac{1}{18} i H, \\ & a_\nu^2 s_\nu (asu)^2 = 0. \end{aligned}\right\} \mod (\varrho, t)$$

Form a_σ: Zerfällt durch Polarisation von (12.) b oder kürzer durch direkte Entwicklung des Produktes $a_\nu^2\cdot\theta_\nu^3$ nach dem Ansatz:

$$a_\nu^2\cdot\theta_{\nu_1}^3 = a_\nu^2\theta_{\nu_1}\{a_{\nu_1} - (\widehat{a\theta}\nu_1 x)\}^2 = -2\,a_\eta(aHu)(a\theta H)(\widehat{a\theta}\eta x) + (\widehat{a\theta}\nu_1 x)^2 a_\nu^2\theta_{\nu_1}$$

und unter Berücksichtigung der Reduktion von $Hj(j\eta x)^2$ (C):

$$a_\sigma = 2a_\nu^2 \cdot \theta_{\nu_1}^3 \;\operatorname{mod}(s, \varrho, t, i). \tag{20.}$$

Folgerungen:

1) $(j\eta x)^3$, $\Delta_\eta(\Delta Hu)$, a_σ^2 sind Reduzenten, $(j\eta x)^2$, $(\Delta Hu)^2$, a_σ zerfallende Formen.

2) f tritt nur in Produkten mit kontragredienten Formen in Faltung mit L ein, f und daher auch K und N überhaupt nicht in Faltung mit σ und folglich auch $(\nu\sigma x)$. j tritt nur in Produkten mit kontragredienten Formen, Δ überhaupt nicht in Produkten in Faltung mit H und L ein (folgt aus $\Delta_\eta(\Delta Hu)$ und $(\Delta Hu)^2$). Ebenso tritt σ und folglich $(\nu\sigma x)$ nicht in Produkten in Faltung mit irgendeiner Form von System I ein. Es bleiben an Produkten in System II, unter Berücksichtigung der Folgerungen in § 11, nur Potenzen von H und Produkte von H mit L.

§ 13. *Formen achter Ordnung (System III).*

$$\textbf{Faltung von} \begin{cases} \Delta \cdot j \text{ mit } \nu, \\ \theta^2, f \cdot j, N \text{ mit } H, \\ \theta \text{ mit } L, \sigma. \end{cases}$$

Irreduzible Formen:

A) $\Delta_\nu(j\nu x)$,

B) $$\begin{array}{ll} (\vartheta^2\eta x)^3 & \cdot \\ (\vartheta^2\eta x)^4 & H_\vartheta(\vartheta^2\eta x)^3,\; \theta_\eta(\vartheta^2\eta x)^3, \end{array}$$

C) $$\begin{array}{ll} (aHu)\,H_j & \cdot \\ \cdot & a_\eta(aHu)\,H_j, \end{array}$$

D) $H_n;\, N_\eta$,

E) $$\begin{array}{lllll} \cdot & \cdot & (\theta L u)^2 & (\theta L u)^3 & \cdot \\ \cdot & \theta_\iota & \cdot & L_\vartheta(\theta L u)^2,\; \theta_\iota(\theta L u)^2 & \theta_\iota(\theta L u)^3 \\ (\vartheta l x)^2 & \cdot & \theta_\iota^2 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \theta_\iota(\vartheta l x)^2 & \cdot & \cdot & \cdot\;\; . \end{array}$$

Reduktionen:

A) $\Delta_\nu (j\nu x)^3$: Reduzent $a_\nu (j\nu x)^3$.

$\Delta_\nu (j\nu x)^2$ reduzibel durch die zerfallende Form $a_\nu (j\nu x)^2$ nach § 3. 2) b unter Berücksichtigung des Reduzenten $\theta_{\vartheta'}$. Denn nach § 11 B) wird:

$$\frac{3}{10} \Delta_\nu (j\nu x)^2 + \frac{3}{5} a_\nu (j\nu\vartheta) a_\vartheta (j\nu x) + \frac{1}{10} a_\nu (j\nu\vartheta)^2 = \frac{3}{5} \theta_\nu^3 \cdot \theta'^2_{\vartheta''} + \frac{2}{5} \theta_\nu^3 \theta_{\vartheta''} \theta'_{\vartheta''}.$$

(Reduzent a_j und $\theta_{\vartheta'}$).

B) Die Formen $H_\vartheta (\vartheta' \eta x)^2$, $H_\vartheta^2 (\vartheta' \eta x)$, $H_\vartheta^2 (\vartheta' \eta x)^2$ zerfallen als entstanden durch sukzessive einmalige Faltung mit den zerfallenden Formen H_ϑ und H_ϑ^2, bzw. $H_\vartheta a_\eta$ und $H_\vartheta^2 a_\eta$ nach § 3. 2) b) und nach der Relation:

$$H_\vartheta (\vartheta' \eta x)^2 = 2\, H_\vartheta a_\eta^2 \cdot f - 2\, H_\vartheta a_\eta b_\eta.$$

C) Formenreihe $a_\eta (j\eta x)^2$: Reduzenten a_j und $(j\eta x)^3$.

Form $a_\eta (j\eta x)$ zerfällt: Reduzent a_j und einmalige Faltung mit der zerfallenden Form $(j\eta x)^2$ nach § 3, 2) a (Spezialisierung $y = uv$).

Form $a_\eta H_j$ zerfällt: 1) durch einmalige Faltung mit der zerfallenden Form $a_\nu (j\nu x)^2$;

2) durch spezielle zweimalige Faltung mit der zerfallenden Form $(j\eta x)^2$; daraus eine Relation zwischen zerfallenden Formen.

Aus $a_\nu (j\nu x)^2$: $0 = \theta_\nu^3 \cdot \theta_\nu + 2\, a_\eta H_j \mod (s, \varrho, t, i, J)$.

Aus $(j\eta x)^2$: $0 = \theta_\nu^3 \cdot \theta_\nu - \frac{3}{2} a_\eta H_j \mod (s, \varrho, t, i, J)$

(Produkte mit Kontravarianten sind ausgelassen),

nach dem Ansatz:

$$0 = \frac{1}{2} a_\nu (abu)^2 \theta_\nu^3 + \frac{1}{2} a_\nu (abu)\, \theta_{\nu_1}^3 (\theta b u) - \frac{3}{4} (\widehat{j\eta}\, b u)^2 + \frac{3}{4} H_j (\widehat{j\eta}\, b u) - \frac{1}{8} f \cdot H_j^2$$

und Vertauschung der Symbole in $a_\nu (abu)(\theta b u) \theta_{\nu_1}^3$.

D) Formenreihe $N_\eta(NHu)$: Reduzent Δ_ν^2.

(NHu), $(n\eta x)$, $N_\eta(n\eta x)$, $H_n(NHu)$ zerfallende Formen (vgl. § 12 B), $(NHu)^2$ zerfällt durch einmalige Faltung mit der Form $(\Delta Hu)^2$.

E) Formenreihen $\theta_l L_\vartheta$, $\theta_l^2(\theta Lu)^2$, $\theta_l^2(\vartheta lx)$:
Reduzenten: $\theta_\eta H_\vartheta$, $\theta_\eta^2(\theta Hu)^2$, $\theta_\eta^2(\vartheta\eta x)$.
Formen (θLu), (ϑlx), L_ϑ, $L_\vartheta(\theta Lu)$, $\theta_l(\theta Lu)$, $L_\vartheta(\vartheta lx)$, $\theta_l(\vartheta lx)$, L_ϑ^2, $L_\vartheta^2(\theta Lu)$, $\theta_l^2(\theta Lu)$ zerfallen. (Den zerfallenden Formen von § 12 B) dualistisch entgegengesetzt).

F) Formenreihe $\theta_\sigma(\vartheta\sigma x)$: Reduzent a_σ^2.

Formen $(\vartheta\sigma x)$ und $(\vartheta\sigma x)^2$ zerfallen, als entstanden durch einmalige Faltung mit der zerfallenden Form a_σ; θ_σ durch zweimalige Faltung entstanden, zerfällt, da die Formenreihe $a_\nu^2(a\theta u)\theta_{\nu_1}^3 \equiv H_j^2(j\eta x) \equiv 0$ mod u lo (s, ϱ, t, i, J):

$$\theta_\sigma = a_\sigma(abu)^2 = a_\nu^2(abu)^2 \cdot \theta_\nu^3.$$

Folgerungen: θ^3 oder $\theta^2 K$ tritt nicht in Faltung mit H ein; θ nur als Kontravariante betrachtet in Potenzen oder Produkten in Faltung mit L, überhaupt nicht in Faltung mit σ und $(\nu\sigma x)$.

N tritt nicht in Produkten in Faltung mit irgend einer Form von System II ein, ebensowenig wie mit Potenzen oder Produkten von Formen von System II. Es bleiben an Produkten in System I, unter Berücksichtigung der Folgerungen der letzten Paragraphen, nur Produkte $f\cdot j$, $\Delta\cdot j$, Potenzen von θ und Produkte von $\theta\cdot K$.

§ 14. *Formen neunter Ordnung (System III).*

$$\text{Faltung von} \begin{cases} \theta\cdot K \text{ mit } H, \\ K, j, \Delta \text{ mit } L, \\ j, \Delta \text{ mit } \sigma, \\ f \text{ mit } H^2. \end{cases}$$

Irreduzible Formen:

$$\text{A)}\ \begin{array}{cc} (\vartheta\cdot k,\eta,x)^4 & \cdot \\ \cdot & H_k(\vartheta\cdot k,\eta,x)^4, \end{array} \qquad \text{B)}\ \begin{array}{ccccc} \cdot & \cdot & \cdot & (KLu)^3 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & K_l(KLu)^3 \\ \cdot & \cdot & K_l^2 & \cdot & \cdot \\ (klx)^3 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & K_l(Klx)^3 & \cdot & \vdots & \cdot \end{array},$$

$$\text{C)}\ \begin{array}{cc} L_j & \cdot \\ \cdot & L_j^2, \end{array} \qquad \text{D)}\ \varDelta_l, \qquad \text{E)}\ (j\sigma x), \qquad \text{G)}\ \begin{array}{ccc} (aH^2u)^3 & (aH^2u)^4 & \cdot \\ \cdot & a_\eta(aH^2u)^3. & \end{array}$$

Reduktionen:

A) die Formen $H_\vartheta(k\eta x)^3$, $H_\vartheta^2(k\eta x)^2$, $H_\vartheta^2(k\eta x)^3$ zerfallen als entstanden durch sukzessive einmalige Faltung mit zerfallenden Formen.

B) Formenreihen $K_l L_k$, $K_l^2(KLu)$, $K_l^2(klx)$:
Reduzenten: $\theta_\eta H_\vartheta$, $a_\eta^2(aHu)$, $\theta_\eta^2(\vartheta\eta x)$.
Formen K_l, $K_l(KLu)$, $K_l(klx)$, $(KLu)^2$, $(klx)^2$ zerfallen als Überschiebungen über Funktionaldeterminanten (§ 3).
Formen L_k, $L_k(KLu)$, $L_k(KLu)^2$, $L_k(klx)$, $L_k(klx)^2$, L_k^2, $L_k^2(KLu)$, $L_k^2(klx)$, L_k^3, $K_l(KLu)^2$, $K_l(klx)^2$ zerfallen als entstanden durch einmalige Faltung mit den zerfallenden Formen:

$$L_\vartheta,\ H_k(KHu),\ L_\vartheta(\vartheta lx),\ H_k^2,\ L_\vartheta^2,\ L_\vartheta^2(\theta Lu),\ K_\eta(KHu),\ \theta_l(\vartheta lx)$$

nach § 3. 2), a) und b).

C) Formenreihe $(jlx)^3$: Reduzent $(j\eta x)^3$.
Formen $(jlx)^2$ und $L_j(jlx)$: Entstanden durch einmalige Faltung mit der zerfallenden Form $(j\eta x)^2$.

D) Formenreihe $\varDelta_l(\varDelta Lu)$: Reduzent $\varDelta_\nu^2$.
Formen $(\varDelta Lu)^2$, $(\varDelta Lu)^3$: Einmalige Faltung mit der zerfallenden Form $(\varDelta Hu)^2$.

E) Formenreihe $(j\sigma x)^2$: Reduzent a_σ^2 durch Ersetzen von j durch niedrigere Formen der Formenreihe (§ 5):

$$a_\sigma^2(a\theta u)^2 = \frac{1}{3}(j\sigma x)^2 \ldots a_\sigma^2(a\theta\sigma x)^2 = \frac{1}{3}(j\sigma x)^4.$$

F) Formenreihe Δ_σ^2: Reduzent a_σ^2.
Form Δ_σ: Reduzent a_σ^2 durch Ersetzen von Δ durch niedrigere Formen der Formenreihe:

$$a_\vartheta\, a_\sigma^2 = \frac{2}{3}\Delta_\sigma \mod \nu.$$

Folgerungen: Nur die Form j tritt in Faltung mit σ und $(\nu\sigma x)$ ein. N tritt nicht in Faltung mit L ein, da die Δ_ι entsprechende Form N_ι zerfällt.

§ 15. *Formen zehnter Ordnung (System III).*

$$\text{Faltung von} \begin{cases} \theta^2,\ f\cdot j \text{ mit } L, \\ \theta \text{ mit } H^2. \end{cases}$$

Irreduzible Formen:

$$\text{A)}\ \begin{array}{cc} (\vartheta^2\, lx)^4 & \cdot \\ \cdot & \theta_\iota(\vartheta^2\, lx)^4, \end{array} \qquad \text{B)}\ \begin{array}{cc} (aLu)^2\, L_j & \cdot \\ \cdot & a_\iota(aLu)^2\, L_j, \end{array}$$

$$\text{C)}\ \begin{array}{ccc} (\theta H^2 u)^3 & (\theta H^2 u)^4 & \cdot \\ \cdot & H_\vartheta(\theta H^2 u)^3, & \theta_\eta(\theta H^2 u)^3. \end{array}$$

Reduktionen:

A) und B): Zerfallen der übrigen Formen durch einmalige Faltung mit zerfallenden Formen.

C) Zerfallen der übrigen Formen nach § 13 B) durch dualistisch entgegengesetzte Betrachtung.

Folgerungen:

$\theta^2 \cdot K$ tritt nicht in Faltung mit L ein; entsprechend $H^2 L$ nicht in Faltung mit K. H^3 und $H^2 L$ treten nicht in Faltung mit θ ein. Das Schema zur Faltung § 7 ist somit bewiesen.

§ 16. *Formen 11., 12., 13., 15. Ordnung (System III).*

11. Ordnung.

$$\text{Faltung von} \begin{cases} \theta\cdot K \text{ mit } L, \\ K, j \text{ mit } H^2, \\ j \text{ mit } (\nu\sigma x), \\ f \text{ mit } H\cdot L. \end{cases}$$

Irreduzible Formen:

A) $(\vartheta\cdot k, l, x)^5$. $\theta_l(\vartheta\cdot k, l, x)^5$, B) $(KH^2u)^4$. $K_\eta(KH^2u)^4$,

C) $(\nu\sigma j)$, D) $(a, H\cdot L, u)^4$.

12. Ordnung.

$$\text{Faltung von} \begin{cases} \theta^3 \text{ mit } L, \\ \theta \text{ mit } H\cdot L. \end{cases}$$

Irreduzible Formen:

E) $(\vartheta^3 lx)^6$, F) $(\theta, H\cdot L, u)^4$. $L_\vartheta(\theta, H\cdot L, u^4)$.

13. Ordnung.

Faltung von K mit $H\cdot L$.

Irreduzible Formen:

G) $(K, H\cdot L, u)^5$. $K_\eta(K, H\cdot L, u)^5$.

15. Ordnung.

Faltung von K mit H_3.

Irreduzible Form:

H) $(KH^3u)^6$.

Reduktionen:

Formen $H_{j'}^2, H_{j''}^2$. Reduzent L_j^3 aus der Relation:

$$(\nu l x) L_x^3 = -\frac{1}{2} H^2 \quad \text{mod } (\sigma, s).$$

Zerfallen oder Reduzibilität der übrigen Formen nach den Betrachtungen der früheren Paragraphen.

Folgerungen:

Nach dem Schema zur Faltung § 7 und den Folgerungen der §§ 8 bis 15 sind hiermit die irreduziblen Formen des Systems III (117 Formen) erschöpft.

Kapitel IV. Das relativ vollständige System mod (ϱ, t).

§ 17. *Reduktion des Moduls $(s s' u)^4$ und des Systems von s.*

Zur Bildung des nächsthöheren relativ vollständigen Systems hat man nach Analogie von § 7 das System von s in bezug auf den nächsten Modul $\nu(s) = (s s' u)^4$ zu bilden und mit den Formen des relativ vollständigen Systems mod s zu falten. Es soll gezeigt werden, daß bei Einführung des Moduls (ϱ, t) als höheren Moduls

A) der Modul $(s s' u)^4$ reduzibel wird,

B) das System von s aus der einzigen Form s besteht.

A) Die Reduktion des Moduls $(s s' u)^4$ ergibt sich sofort aus dem durch Formel (16.) § 11 gefundenen Reduzenten s_ν^2. Aus

$$s_\nu^2 = \frac{4}{3} i a_\nu^2 + \frac{4}{5} \theta_\varrho^2 + \frac{8}{5} (a t u)^2 - \frac{26}{15} (\nu \varrho x)^2 + \frac{1}{6} J \cdot u_x^2 - \frac{2}{9} i^2 \cdot u_x^2$$

folgt durch Polarisation von x nach ν_1:

$$(21.)^{*)} \qquad \begin{aligned} (s s' u)^4 &= -\frac{2}{3} J \cdot \nu + 6 s_\nu^2 s_{\nu_1}^2 \\ &= \frac{24}{5} \theta_\nu^2 \theta_\varrho^2 + \frac{48}{5} a_\nu^2 (a t u)^2 - \frac{52}{5} H_\varrho^2 + \frac{4}{3} i \cdot (a s u)^4 + \frac{1}{3} J \cdot \nu - \frac{4}{9} i^2 \cdot \nu \end{aligned}$$

und damit die Reduktion des Moduls $(s s' u)^4$.

---

*) Aus Formel (21.) folgt die in der Anmerkung zur Einleitung erwähnte

B) Die Reduktion von $Z=(ss'u)^2=\theta(s)$ und daraus die Reduktion des Systems von s ergibt sich durch Ersetzen der Form Z durch die niedrigere Form g_ν^2 nach Formel (8.) b, § 7 unter Berücksichtigung der Relation

$$s_\eta^2 = s_\nu^2 (\nu \nu_1 x)^2 - \frac{1}{3} Z.$$

Die Form g_ν^2 hat nach Formel (13.), § 11 den Reduzenten s_ν^2 zum Faktor.

Es wird, nach Formel (8.) und (16.):

$$g_\nu^2 = -Z + \frac{14}{5} i a_\eta^2 + \frac{14}{15} i (asu)^2 \quad \text{mod } (\varrho, t),$$

nach Formel (13.), (14.), (15.), (16.):

$$g_\nu^2 = 2[s_\vartheta^2]_{\nu^2} - \frac{4}{3} i \Delta_\nu^2 = 2 s_\vartheta^2 s_\nu^2 - \frac{6}{5} [s_\vartheta^2 (\theta s u)^2] \ \widehat{\nu x}^2 - \frac{4}{3} i \Delta_\nu^2$$

$$= \frac{4}{5} i \cdot a_\eta^2 - \frac{2}{5} i \cdot (asu)^2 + \frac{1}{3} J \cdot \theta \quad \text{mod } (\varrho, t):$$

$$Z = 2 i \cdot a_\eta^2 + \frac{4}{3} i \cdot (asu)^2 - \frac{1}{3} J \cdot \theta \quad \text{mod } (\varrho, t). \tag{23.}$$

Das relativ vollständige System mod $((ss'u)^4, \varrho, t)$ geht also über in ein relativ vollständiges System mod (ϱ, t), und aus diesem entsteht durch Überschiebung über das bekannte System zweier quadratischen Formen das absolut vollständige. Zur Bildung des relativ vollständigen Systems mod (ϱ, t) haben wir, da nach Formel (23.) das System von s sich reduziert auf die Form s, das relativ vollständige System mod (s, ϱ, t) über s und Potenzen von s zu überschieben. Es wird sich zeigen, daß Potenzen von s nur mit System I in Faltung eingehen.

Relation zwischen den drei Invarianten 9. Ordnung, unter Anwendung von Formel (10.) c

$$(22.) \quad \begin{aligned} (ass')^4 &= \frac{24}{5} \theta_\nu^2 \theta_\varrho^2 a_\nu^2 a_\vartheta^2 + \frac{48}{5} a_\nu^2 b_\nu^2 (tab)^2 - \frac{52}{5} H_\varrho^2 a_\eta^4 + \frac{5}{3} J \cdot i - \frac{4}{9} i^3, \\ (ass')^4 &= \frac{24}{5} a_\varrho^2 a_{\varrho'}^2 - \frac{12}{5} t_\varrho^2 + \frac{5}{3} J \cdot i - \frac{4}{9} i^3. \end{aligned}$$

Als „höhere Formen“ definieren wir unter den Formen gleicher Ordnung und gleichen Grades diejenigen, die aus höheren Formen des relativ vollständigen Systems mod (s, ϱ, t) durch Faltung mit s hervorgegangen sind, indem wir die Faltung mit s nur als Polarisation der ursprünglichen Formen betrachten. Dadurch ist die Anordnung der einzelnen Formen eindeutig bestimmt [vgl. § 1. Formenreihen 2)].

Es wird beispielsweise:

$$(\theta_\eta(\theta H u), s, u)^2 \text{ höher als } s_\eta((\theta H u)^2, s, u)^{*}),$$

$$(\theta_\eta(\theta H u)^2, s, u) \text{ höher als } (\theta_\eta(\theta H u), s, u)^2.$$

Wir teilen das entstehende System in die vier Teilsysteme:

System s_I: Entstanden durch Faltung von s und Potenzen von s mit System I.

System s_{II}: Entstanden durch Faltung von s mit System II.

System s_{III}: Entstanden durch Faltung von s mit den einzelnen Formen (ohne Produkte) von System III und mit Produkten von je einer Form von System I und II.

System s_{IV}: Entstanden durch Faltung von s mit Produkten von je einer Form von System I und III, II und III, III und III.

Bemerkt sei noch, daß von jetzt an alle Formeln mod (ϱ, t) zu verstehen sind, von Formel (27.) an mod $(\varrho, t, i, J,$ höhere Formen), ohne daß dies jedesmal ausdrücklich angegeben wird.

Zur Reduktion stellen wir die früher gewonnenen Formeln zusammen:

$$(24.)\qquad \begin{aligned} s_\nu^2 &= \frac{4}{3} i a_\nu^2 + \frac{1}{6} J \cdot u_x^2 - \frac{2}{9} i^2 \cdot u_x^2, \\ s_\nu^3 &= \frac{1}{3} J \cdot u_x, \quad s_\nu^4 = J, \end{aligned}$$

---

*) Der kürzeren Schreibart willen nehmen wir das Glied der Überschiebung an Stelle der vollständigen Überschiebung $[(\theta H u)^2]\widehat{_{su}}\, s$ als Form des Systems auf. Bei Aufstellung von Formeln werden alle Überschiebungen durch ihre Anfangsglieder ersetzt; z. B.: $(\theta_\eta(\theta H u), s, u)^2$ durch $\theta_\eta(\theta H u)(\theta s u)^2$.

$$g = 2s_\vartheta^2 - \frac{4}{3}\, i\Delta,$$

$$s_\vartheta^2(\theta s u) = 0,$$

$$s_\vartheta^2(\theta s u)^2 = \frac{8}{9}\, i\cdot a_\nu^2 - \frac{4}{27}\, i^2\cdot u_x^2,$$

(24.)
$$Z = 2i\cdot a_\eta^2 + \frac{4}{3}\, i(a s u)^2 - \frac{1}{3}\, J\cdot\theta,$$

$$g_\nu = -s_\eta + u_x\left\{2ia_\eta^2 - \frac{2}{3}\, i(a s u)^2 + \frac{2}{3}\, J\cdot\theta\right\},$$

$$g_\nu^2 = \frac{4}{5}\, ia_\eta^2 - \frac{2}{5}\, i(a s u)^2 + \frac{1}{3}\, J\cdot\theta,$$

$$g_\nu^3 = 0, \quad g_\nu^4 = 0.$$

Folgerungen:

s_ν^2, $s_\vartheta^2(\theta s u)$, $s_\vartheta^2 s_\nu$, $s_\vartheta^2\theta_\nu$ **sind Reduzenten.**

§ 18. *System* s_I.

Faltung von $\begin{cases} s \text{ mit } f;\ \ \theta;\ \ K, j, \Delta;\ \ f\cdot j, N;\ \ \Delta\cdot j, \\ s^2 \text{ mit } \theta, K. \end{cases}$

Irreduzible Formen.

5. Ordnung.

$(a s u)$; $(a s u)^2$; $(a s u)^3$; $(a s u)^4$.

6. Ordnung.

$(\theta s u)$	$(\theta s u)^2$	$(\theta s u)^3$	$(\theta s u)^4$
s_ϑ	$s_\vartheta(\theta s u)$	$s_\vartheta(\theta s u)^2$	$s_\vartheta(\theta s u)^3$
.	s_ϑ^2	.	.

7. Ordnung.

$$\text{A)}\quad \begin{matrix} \cdot & (Ksu)^2 & (Ksu)^3 & (Ksu)^4 \\ s_k & s_k(Ksu) & s_k(Ksu)^2 & s_k(Ksu)^3 \\ \cdot & s_k^2 & \cdot & \cdot \end{matrix}, \qquad \text{B)}\ s_j, \qquad \text{C)}\ (\varDelta su),\ (\varDelta su)^2.$$

8. Ordnung.

$$\text{A)}\ s_j(asu),\ s_j(asu)^2,\ s_j(asu)^3, \qquad \text{B)}\ \begin{matrix} \cdot & (Nsu)^2 \\ s_n & s_n(Nsu). \end{matrix}$$

10. Ordnung.

$$\text{A)}\ s_j(\varDelta su),\quad \text{B)}\ s_\vartheta(\theta s'u)^4.$$

11. Ordnung.

$$\begin{matrix} (Ks^2u)^6 & \cdot \\ s_k(Ks^2u)^5 & s_k(Ks^2u)^6. \end{matrix}$$

Reduktionen:

Die Formenreihen

$$s_\vartheta^2(\theta su),\ s_k^2(Ksu),\ s_j^2,\ (\varDelta su)^3,\ (Nsu)^3.$$

haben den Reduzenten $s_\vartheta^2(\theta su)$ zum Faktor, s_j^2 und $(\varDelta su)^3$ durch Zurückgehen von j und $\varDelta$ auf niedrigere Formen der Formenreihe:

$$s_\vartheta^2(\theta su)(a\theta u)^3 = -\frac{1}{2}s_j^2,$$

$$s_\vartheta^2(\theta su)(a\theta u)^2 = \frac{1}{3}(\varDelta su)^3,$$

$$s_\vartheta^2(\theta su)^2(a\theta u)^2 = \frac{1}{3}(\varDelta su)^4 + \frac{1}{3}s_j^2.$$

Formen $s_\vartheta^2 s_{\vartheta'}$ und $s_\vartheta^2 s_{\vartheta'}^2$: Reduzenten $s_\vartheta^2(\theta s u)$ und $\theta_{\vartheta'}$:

$$s_\vartheta^2 s_{\vartheta'} = s_\vartheta^2 \theta_{\vartheta'} - s_\vartheta^2 (\theta s \widehat{\vartheta' x}), \qquad s_\vartheta^2 s_{\vartheta'}^2 = s_\vartheta^2 s_{\vartheta'} \theta_{\vartheta'} - s_\vartheta^2 s_{\vartheta'} (\theta s \widehat{\vartheta' x}).$$

Formenreihe $s_j(\varDelta s u)^2$: Reduzenten $\varDelta_j$ und $(\varDelta s u)^3$.

Folgerungen:

s tritt nicht in Potenzen in Faltung mit $f, j, \varDelta, N$ ein. $f, j, \varDelta, N$ treten nur in Produkten mit kontragredienten Formen in Faltung ein, die aber bei den Produkten mit f noch quadratisch in x, bei den Produkten mit $\varDelta$ noch linear in x sein können; d. h. folgende Produkte von Formen sind zu betrachten:

$$f\cdot(0,\lambda),\quad f\cdot(1,\lambda),\quad f\cdot(2,\lambda),\quad j\cdot(\mu,0),\quad N \text{ und } \varDelta\cdot(0,\lambda)\quad \varDelta\cdot(1,\lambda)\quad (\lambda > 0),$$

wobei (μ, λ) eine Form μten Grades in x, λten Grades in u bedeutet.

θ oder K treten nicht in Potenzen oder Produkten mit beliebigen Formen in Faltung mit s oder s^2 ein.

Für Produkte mit der Funktionaldeterminante K, $K\cdot\varphi_x$ ($\varphi \neq f$ oder θ) gilt nämlich die Relation zwischen zerfallenden Formen:

$$K\cdot\varphi_x = (a\theta u)\,\varphi_x = f\cdot(\varphi\theta u) - \theta\cdot(\varphi a u).$$

Das oben stehende Schema zur Faltung von System s_I ist somit bewiesen.

§ 19. *System s_{II}.*

Faltung von s mit ν; H; L; H^2.

Irreduzible Formen:

	6. Ordnung.	8. Ordnung.		10. Ordnung.		12. Ordnung.
s_ν		(Hsu)	$(Hsu)^2$	$(Lsu)^2$	$(Lsu)^3$	$(H^2su)^3$.
		$s\eta$	;	s_ι	;	
	$s_\nu^4 = J$;					

Reduktionen:

Formenreihen $s_\eta(Hsu)$ und $s_\iota(Lsu)$: Reduzent s_ν^2.

Formenreihe s_σ: Reduzent s_ν^2 aus H, $s_\nu^2 = \frac{2}{3} s_\sigma$.

$(H^2 su)^4$ zerfällt aus Formel (7.)a. (vgl. § 11. A). Daraus: Zerfallen von $(H{\cdot}L, s, u)^4$.

Folgerungen:

s^2 tritt nicht in Faltung mit System II ein.

ν tritt nur in Produkten mit kontragredienten Formen,

H in Produkten mit Formen $(1, \lambda)$, $(2, \lambda)$, $(3, \lambda)$ (λ beliebig), als Kovariante betrachtet, in Faltung ein.

ϱ und $(\nu\sigma x)$ treten überhaupt nicht, L als Funktionaldeterminante nicht in Produkten in Faltung ein (die vollen Überschiebungen über Kovarianten von System III werden reduzibel).

Als Produkte von System I und II bleiben:

$$f{\cdot}\nu, \quad \Delta{\cdot}\nu.$$

§ 20. *Formen 7. Ordnung (System s_{III}).*

Faltung von s mit $f{\cdot}\nu$, a_ν, a_ν^2.

Irreduzible Formen:

$$s_\nu(asu),\ a_\nu(asu), \quad s_\nu(asu)^2,\ a_\nu(asu)^2, \quad s_\nu(asu)^3,\ a_\nu(asu)^3,$$
$$a_\nu s_\nu, \quad a_\nu s_\nu(asu),\ a_\nu^2(asu), \quad a_\nu^2(asu)^2.$$

Reduktionen:

Die selbstverständlichen, aus direkter Faltung mit den Reduzenten s_ν^2 und $s_\eta(Hsu)$ hervorgehenden Reduktionen sollen nicht erwähnt werden, ebenso wenig das Zerfallen von Überschiebungen mit Funktionaldeterminanten.

Form $a_\nu s_\nu(asu)^2$ und $a_\nu^2 s_\nu(asu)^2$: siehe Formel (19.), § 12;

$$a_\nu s_\nu(asu)^3 = a_\nu(a\widehat{\nu_1\nu_2}u)^3(\nu_1\nu_2\nu) = 0.$$

Formenreihe $a_\nu^2 s_\nu$: Reduzent $s_\vartheta^2(\theta su)$ durch Zurückgehen von a_ν^2 auf niedrigere Formen, d. h. durch doppelte Reduktion der Ausdrücke $s_\vartheta^2(a\theta s)(a\theta u)$, $s_\vartheta^2(a\theta s)(a\theta u)^2$ nach dem Ansatz:

$$s_\vartheta^2(a\theta s)(a\theta u) = [(a\theta u)^2]s^3 + \frac{1}{5}[a_\vartheta(a\theta u)^2]s^2 + \frac{1}{60}[a_\vartheta^2(a\theta u)^2]s = \frac{1}{2}a_\nu^2 s_\nu - \frac{2}{3}a_\nu s_\nu^2,$$

$$s_\vartheta^2(a\theta s)(a\theta u)^2 = \frac{4}{5}[a_\vartheta(a\theta u)^2]_{\widehat{u}} s^2 + \frac{23}{180}[a_\vartheta^2(a\theta u)^2]_{\widehat{u}} s = -\frac{1}{2}a_\nu^2 s_\nu(asu).$$

$$(a_\nu^2 b_\nu(abu) = 0).$$

Es entstehen die Formeln:

$$(25.)\quad \begin{array}{lll} \cdot & \underline{a_\nu s_\nu (asu)^2} = \frac{1}{3} i\cdot\theta_\nu^2 - \frac{1}{18} iH, & \underline{a_\nu s_\nu (asu)^3} = 0, \\ \underline{a_\nu^2 s_\nu} = \frac{4}{3} i\cdot a_\nu^2 b_\nu, & \underline{a_\nu^2 s_\nu (asu)} = 0, & \underline{a_\nu^2 s_\nu (asu)^2} = 0. \end{array}$$

Folgerungen:

1) $a_\nu s_\nu (asu)^2$, $a_\nu^2 s_\nu$ sind Reduzenten.

2) Es ergeben sich die Werte der in § 19 als reduzibel erkannten Formen $(\varDelta su)^3$, $(\varDelta su)^4$; ebenso für die entsprechende Formenreihe $(agu)^2$, die bei Faltung mit ν durch den Reduzenten g_ν Anlaß zur doppelten Reduktion gibt.

$$(26.)\quad \begin{array}{ll} \text{a)} & (\varDelta su)^3 = -\frac{6}{5} a_\nu^2 (asu) + 3\, a_\nu s_\nu (asu) + 2\, i\cdot\theta_\nu (\vartheta\nu x), \\ \text{b)} & (\varDelta su)^4 = -\frac{2}{5} a_\nu^2 (asu)^2 + \frac{4}{3} i\theta_\nu^2 + \frac{1}{9} iH. \end{array}$$

Aus Formel (24.) und (26.), mod (i, J) (vgl. S. 71):

$$(27.)\quad \begin{array}{ll} \text{a)} & (agu)^2 = \frac{2}{3} (\varDelta su)^2 - \frac{4}{3} a_\nu s_\nu + \frac{3}{5} s\cdot a_\nu^2, \\ \text{b)} & (agu)^3 = 2\, a_\nu s_\nu (asu) - a_\nu^2 (asu)^2, \\ \text{c)} & (agu)^4 = -a_\nu^2 (asu)^2. \end{array}$$

§ 21. *Formen 8. Ordnung (System s_{III}).*

Faltung von s mit den Formen 4. Ordnung (System III). (§ 9).

Irreduzible Formen:

$\cdot$ $(\vartheta\nu x) s_\nu$, $((\vartheta\nu x^2), s, u)$ $(\vartheta\nu x)^2 s_\nu$	$((\vartheta\nu x), s, u)^2$, $(\theta_\nu su)$ $((\vartheta\nu x)^2, s, u)^2$, $\theta\ \ s_\nu$ $((\vartheta\nu x)^2, s, u) s_\nu$, $(\theta_\nu (\vartheta\nu x)^2, s, u)$	✻	$\cdot$

✻	$((\vartheta\nu x), s, u)^3$, $(\theta_\nu su)^2$ $((\vartheta\nu x)^2, s, u)^3$, $(\theta_\nu (\vartheta\nu x), s, u)^2$, $(\theta_\nu^2 su)$ $\cdot$	$((\vartheta\nu x), s, u)^4$, $(\theta_\nu su)^3$ $(\theta_\nu (\vartheta\nu x), s, u)^3$, $(\theta_\nu^2 su)^2$ $(\theta_\nu^3 su)$	$\cdot$ $(\theta_\nu (\vartheta\nu x), s, u)^4$. $\cdot$

Reduktionen:

$((\vartheta\nu x), s, u)s_\nu$ zerfällt als Überschiebung über Funktionaldeterminanten nach § 3.

Formenreihe $((\vartheta\nu x), s, u)^2 s_\nu$: Reduzent s_ν^2 und $s_\vartheta^2\theta_\nu$:

$$\begin{aligned}(\widehat{\vartheta\nu}su)s_\nu(\theta su) &= s_\nu s_\vartheta(\theta su) = -\frac{1}{2}(\widehat{\vartheta\nu}su)^2(\theta su),\\ \theta_\nu(\widehat{\vartheta\nu}su)s_\nu &= \theta_\nu s_\nu s_\vartheta = -\frac{1}{2}\theta_\nu(\widehat{\vartheta\nu}su)^2.\end{aligned} \qquad \text{(Produktsatz.)}$$

Formenreihe $\theta_\nu s_\nu(\theta su)$: Reduzent $a_\nu s_\nu(asu)^2$ durch doppelte Reduktion der Ausdrücke:

$$a_\nu s_\nu(asu)^2(abu) \text{ und } a_\nu s_\nu(asu)^2(abu)(sbu);$$

$\theta_\nu s_\nu(\theta su)^3$ durch doppelte Reduktion von $(agu)^3(abu)(bgu)^3$.

Formenreihe $\theta_\nu(\vartheta\nu x)s_\nu$: Reduzent $a_\nu^2 s_\nu$ aus $\theta_\nu(\vartheta\nu x)s_\nu = a_\nu^2(abu)s_\nu$.

Formenreihe $(\theta_\nu(\vartheta\nu x)^2, s, u)$: Doppelte Reduktion der Formen der Formenreihe $\theta_\nu(\widehat{\vartheta\nu}su)s_\nu$, die zugleich den Formenreihen $((\vartheta\nu x)su)^2 s_\nu$ und $\theta_\nu(\vartheta\nu x)s_\nu$ angehören.

Form $(\theta_\nu(\vartheta\nu x), s, u)$ zerfällt als einmalige Überschiebung über die Funktionaldeterminante $\theta_\nu(\vartheta\nu x) = a_\nu^2(abu)$.

Form $(\vartheta\nu x)^2, s, u)^4$: doppelte Reduktion des Ausdrucks $(a\varDelta u)^2(\varDelta su)^4$ oder auch von $(\theta gu)^4$ aus den Formeln (27.) und analog der Reduktion von $(j\eta x)^4$ (§ 12 C)).

Durch doppelte Reduktion entstehen die Formeln:

$$\begin{aligned}
&0 = \theta_\nu s_\nu(\theta su) - \frac{1}{6}(\widehat{\vartheta\nu}su)^2(\theta su) - \frac{1}{12}(Hsu),\\
&0 = \theta_\nu s\ (\theta su)^2 - \frac{1}{4}(\widehat{\vartheta\nu}su)^2(\theta su)^2 - \frac{1}{24}(Hsu)^2,\\
(28.)\quad &0 = (\widehat{\vartheta\nu}su)^2(\theta su)^2 + 2\theta_\nu(\widehat{\vartheta\nu}su)(\theta su)^2 + 3\theta_\nu^2(\theta su)^2 - \frac{1}{3}H(su)^2,\\
&0 = \theta_\nu s_\nu(\theta su)^3 + \frac{1}{2}\theta_\nu(\widehat{\vartheta\nu}su)(\theta su)^3,\\
&0 = \theta_\nu s_\nu s_\vartheta - \frac{1}{4}s_\eta, \quad 0 = \theta_\nu s_\nu s_\vartheta(\theta su), \quad 0 = \theta_\nu s_\nu s_\vartheta(\theta su)^2
\end{aligned}$$

(entspricht $(\theta_\nu(\vartheta\nu x)^2, s, u)^2 \ldots$).

Folgerungen:

1) $\theta\,(\vartheta\nu x)s_\nu$, $(\widehat{\vartheta\nu}su)(\theta su)s_\nu$, $\theta_\nu(\widehat{\vartheta\nu}su)^2$, $(\widehat{\vartheta\nu}su)^2(\theta su)^2$ **sind Reduzenten.**
2) **Die Formen vierter Ordnung** $(5,\lambda)$, $(6,\lambda)$ **usw. treten nicht in Faltung mit** s^2 **ein.**
3) **Für die Formenreihe** $(\theta g u)^2$ **ergeben sich nach (27.) unter Berücksichtigung der Reduktionen dieses Paragraphen folgende Formeln:**

$$\text{(29.)}\quad \begin{aligned}
&\text{a)}\quad (\theta g u)^2 = \frac{4}{3}\theta_\nu s_\nu + \frac{2}{3}s_\nu s_\vartheta - \frac{1}{3}s\cdot\theta_\nu^2 - \frac{1}{9}s\cdot H - \frac{1}{3}f\cdot a_\nu^2(asu)^2 + \frac{1}{3}a_\nu^2\cdot(asu)^2,\\
&\text{b)}\quad (\theta g u)^3 = -\frac{1}{3}(\widehat{\vartheta\nu}su)^2(\theta su) - \theta_\nu(\widehat{\vartheta\nu}su)(\theta su) - \theta_\nu^2(\theta su),\\
&\text{c)}\quad (\theta g u)^4 = 2\theta_\nu^2(\theta su)^2 - \frac{1}{3}(Hsu)^2,\\
&\qquad g\vartheta(\theta g u) = (\widehat{\vartheta\nu}su)(\vartheta\nu x)s_\nu - \theta_\nu(\vartheta\nu x)(\widehat{\vartheta\nu}su),\\
&\qquad g\vartheta(\theta g u)^2 = \frac{2}{3}s\cdot\theta_\nu^3,\quad g\vartheta(\theta g u)^3 = \frac{1}{3}\theta_\nu^3(\theta su),\quad g\vartheta(\theta g u)^4 = 0.
\end{aligned}$$

§ 22. *Formen neunter Ordnung (System s_{III}).*

Faltung von s **mit den Formen fünfter Ordnung (System III) und dem Produkt** $\varDelta\cdot\nu$ **(§ 10).**

Irreduzible Formen:

$$\text{A)}\quad \begin{array}{c|c|c|c}
\cdot & \cdot & (K_\nu su)^2 & \ast\\
\cdot & ((k\nu x)^2, s, u)^2,\ K_\nu s_\nu & ((k\nu x)^2, s, u)^3 & \\
(k\nu x)^2 s_\nu,\ ((k\nu x)^3, s, u) & ((k\nu x)^3, s, u)^2 & \cdot & \cdot\\
(k\nu x)^3 s_\nu & ((k\nu x)^3, s, u)s_\nu,\ (K_\nu(k\nu x)^3, s, u) & \cdot & \cdot
\end{array}$$

$$\ast\ \begin{array}{|c|c|c}
(K_\nu su)^3 & (K_\nu su)^4 & \cdot\\
\cdot & \cdot & (K_\nu^2 su)^4,
\end{array}$$

$$\text{B)}\quad \begin{array}{c|c}
(j\nu x)s_\nu,\ ((j\nu x)^2, s, u) & ((j\nu x)^2, s, u)^2\\
(j\nu x)^3, s, u) & \cdot
\end{array}\ ,\qquad \text{C)}\quad s_\nu(\varDelta su),\ (\varDelta_\nu su),$$

$$\text{D)}\quad \begin{array}{c|c|c}
\cdot & ((aHu), s, u)^2,\ ((aHu)^2, s, u) & \ast\\
(aHu)s_\eta,\ (a_\eta su) & (aHu)^2 s_\eta,\ (a_\eta su)^2 & \\
\cdot & (a_\eta^2 su) &
\end{array}$$

$$\ast\ \begin{array}{|c|c}
((aHu), s, u)^3,\ (aHu)^2, s, u)^2 & ((aHu), s, u)^4\\
(a_\eta su)^3,\ (a_\eta(aHu), s, u)^2,\ (a_\eta(aHu)^2, s, u) & (a_\eta(aHu), s, u)^3.
\end{array}$$

Reduktionen:

A) Die Reduktionen folgen direkt aus den Reduktionen von § 21 durch einmalige Faltung. Die Formenreihe $K_\nu s_\nu (Ksu)^2$ hat die Reduzenten $a_\nu s_\nu (asu)^2$ und $\theta_\nu s_\nu (\theta su)^2$ zu Faktoren. Daraus Zerfallen der höheren Formen $K_\nu^2 (Ksu)^2$, $K_\nu^2 (Ksu)^3$ nach dem Ansatz:

$$0 = a_\nu s_\nu (asu)^2 (a\theta u) = K_\nu s_\nu (Ksu)^2 = \theta_\nu s_\nu (\theta su)^2 (a\theta u).$$

B) Formenreihe $(j\nu x)^2 s_\nu$: Reduzent $a_\nu^2 s_\nu$ aus $(j\nu x)^2 s_\nu = 3\, a_\nu^2 s_\nu (a\theta u)^2$.

$((j\nu x)^3, su)^2$: Reduzent $a_\nu^2 s_\nu$ aus $((j\nu x)^3, s, u)^2 = -6\, a_\nu^2 s_\nu (a\theta u)^2 (\theta su)$.

C) Formen $\varDelta_\nu (\varDelta su)^2$ und $s_\nu (\varDelta su)^2$: Reduzent g_ν aus Formel (27.)a.

Form $\varDelta_\nu s_\nu$: 1) Reduzent $a_\nu^2 s_\nu$ aus $a_\vartheta a_\nu^2 s_\nu = \frac{2}{3} \varDelta_\nu s_\nu$;

2) zerfällt nach Formel (27.)a durch doppelte Reduktion des Ausdrucks $(\varDelta s \widehat{\nu x})^2$.

Daraus: Zerfallen der höheren Form $a_\eta s_\eta$.

D) Formenreihe $(aHu)^2 s_\eta (asu)$: Reduzent $a_\nu s_\nu (asu)^2$ durch doppelte Reduktion der Formenreihe $[a_\nu s_\nu (asu)^2] \widehat{\nu_1 x}$; Reduktion von $(aHu)^2 s_\eta (asu)^2$ aus $a_\nu s_\nu (asu)^2$ und $a_\nu s_\nu (asu)^3$. Daraus Reduktion von $(a_\eta, s, u)^4$.

Formenreihe $a_\eta (aHu) s_\eta$: Reduzent $a_\nu^2 s_\nu$. $a_\eta^2 s_\eta$ durch doppelte Reduktion des Ausdrucks $(\varDelta s \widehat{\nu x})^3$, da $a_\eta^2 s_\eta$ nicht aus dem reduziblen Glied $a_\nu^2 s_\nu (\nu \nu_1 x)$ der Form $a_\eta (aHu) s_\eta$ durch Faltung entsteht.

Formenreihe $(a_\eta^2 su)^2$: Reduzent $a_\nu^2 s_\nu$ aus $a_\nu^2 s_\nu s_{\nu_1} = -\frac{1}{2} a_\eta^2 (Hsu)^2$.

Form $(a_\eta (aHu), s, u)$ zerfällt als Überschiebung über eine Funktionaldeterminante.

Es entstehen die Reduktionsformeln:

$$(30.)\quad \begin{aligned}
&\text{a)}\ \ 0 = (aHu)^2 (asu) s_\eta - a_\eta (asu)(Hsu)^2 - a_\eta (aHu)(asu)(Hsu),\\
&\text{b)}\ \ 0 = (aHu)^2 (asu)^2 s_\eta - a_\eta (aHu)(asu)^2 (Hsu),\\
&\text{c)}\ \ 0 = a_\eta (asu)^2 (Hsu)^2,\\
&\qquad 0 = a_\eta s_\eta + \tfrac{1}{4} a_\nu^2 \cdot g - \tfrac{1}{4} s \cdot a_\eta^2,\\
&\qquad 0 = a_\eta (aHu) s_\eta - \tfrac{1}{2} a_\eta^2 (Hsu), \quad 0 = a_\eta^2 (Hsu)^2, \ldots\ 0 = a_\eta^2 s_\eta.
\end{aligned}$$

Folgerungen:

1) $(j\nu x)^2 s'_{\nu}$, $\Delta_\nu s_\nu$, $\Delta_\nu(\Delta s u)^2$ und folglich $N_\nu(N s u)^2$, $(a H u)^2 (a s u) s_\eta$, $a_\eta (a H u) s_\eta$, $a_\eta^2 (H s u)^2$ sind Reduzenten; $a_\eta s_\eta$ ist zerfallende Form, die bei allen ein- und zweimaligen Faltungen in zerfallende Formen übergeht.

2) Die Formen 5. Ordnung $(5, \lambda)$, $(6, \lambda)$ usw. treten nicht in Faltung mit s^2 ein.

§ 23. *Formen zehnter Ordnung (System s_{III}).*

Faltung von s mit den Formen sechster Ordnung (System III). (§ 11).
Irreduzible Formen:

$$\text{A)}\quad \begin{array}{c|c} (\vartheta^2 \nu x)^3 s_\nu & \cdot \\ \cdot & (\vartheta^2 \nu x)^3 s_\nu s_\vartheta,\ \theta_\nu (\vartheta^2 \nu x)^3 s_\vartheta, \end{array}$$

$$\text{B)}\quad \begin{array}{c|c|c|c} \cdot & (a_\nu (j\nu x), s, u)^2 & (a_\nu (j\nu x), s, u)^3 & (a_\nu (j\nu x), s, u)^4 \\ a_\nu (j\nu x) s_\nu & \cdot & (a_\nu^2 (j\nu x), s, u)^2 & (a_\nu^2 (j\nu x), s, u)^3, \end{array}$$

$$\text{C)}\quad \begin{array}{c|c|c|c} \cdot & \cdot & ((\theta H u), s, u)^2,\ (((\theta H u)^2, s, u) & * \\ \cdot & ((\vartheta \eta x), s, u)^2,\ (\theta H u) s_\eta,\ (\theta_\eta s u) & ((\vartheta \eta x), s, u)^3,\ (\theta_\eta s u)^2 & \\ ((\vartheta \eta x)^2, s, u) & \cdot & (\theta_\eta^2 s u) & \\ \cdot & (\theta_\eta (\vartheta \eta x)^2, s, u) & \cdot & . \end{array}$$

$$* \begin{array}{|c|c} ((\theta H u), s, u)^3,\ (((\theta H u)^2, s, u)^2 & ((\theta H u), s, u)^4 \\ (H_\vartheta (\theta H u), s, u)^2,\ (\theta_\eta (\theta H u), s, u)^2,\ (\theta_\eta (\theta H u)^2, s'_{\eta}, u) & (\theta_\eta s u)^4,\ (\theta_\eta (\theta H u), s, u)^3 \\ \cdot & (\theta_\eta^2 (\theta H u), s, u)^2. \end{array}$$

Reduktionen:

A) die Formen $((\vartheta^2 \nu x)^3, s, u)^2$, $((\vartheta^2 \nu x)^3, s, u)^3$ zerfallen:

$$(\vartheta \nu x)(\widehat{\vartheta \nu} s u)(\widehat{\vartheta'} \nu s u) = (\vartheta \nu x) s_\vartheta s_{\vartheta'} - (\vartheta \nu x) s_\nu s_{\vartheta'} = -2\,\theta \cdot (\vartheta \nu x) s_\nu s_\vartheta + (\vartheta \nu x) \cdot s_\vartheta^2.$$

Übrige Formen: entweder Reduzenten zum Faktor oder einmalige Faltung mit zerfallenden Formen.

B) Reduzent $a_\nu^2 s_\nu$ und $(\widehat{j\nu} s u) s_\nu$.

C) 1. Formenreihe $(\theta Hu)^2 s_\eta$: a) Reduzent $(aHu)^2(asu)s_\eta$; b) doppelte Reduktion der Formenreihen $(\theta gu)^3 g_\nu$ und $g_\nu (agu)^3 (bgu)^2 (abu)$.

Daraus Reduktion der höheren Formen $(\theta_\eta su)^3$, $(H_\vartheta(\theta Hu), s, u)^3$ und $(a_\nu \cdot b^2_{\nu_1}, s, u)^4$ [letztere Form an Stelle von $(H_\vartheta su)^4$].

2. $((\vartheta\eta x), s, u)^4$: Reduzent $(a_\eta su)^4$.

3. $((\vartheta\eta x)^2, s, u)^3$: Reduzent $s^2_\vartheta s_\nu$ aus $(\widehat{\vartheta\eta} su)^2 (Hsu)$.

Formen $(\vartheta\eta x) s_\eta$, $(\vartheta\eta x)^2 s_\eta$, $((\vartheta\eta x)^2, s, u)^2$, $\theta_\eta s_\eta$ zerfallen durch Faltung mit der zerfallenden Form $a_\eta s_\eta$.

4. Formenreihen $H_\vartheta(\theta Hu)s_\eta$, $\theta_\eta(\theta Hu)s_\eta$, $H_\vartheta(\vartheta\eta x)s_\eta$, $\theta_\eta(\vartheta\eta x)s_\eta$: Reduzenten $a_\eta(aHu)s_\eta$ und $a^2_\eta s_\eta$.

Formenreihe $(\theta_\eta(\vartheta\eta x), s, u)^2$: Reduzent $a^2_\eta (Hsu)^2$ [mit Ausnahme von $(\theta^2_\eta(\theta Hu), s, u)^2$, das aus dem Glied $a^2_\eta (bsu)(Hsu)$ durch Faltung entsteht].

5. $(H_\vartheta(\vartheta\eta x), s, u)$, $(H_\vartheta(\vartheta\eta x), s, u)^2$: doppelte Reduktion von $a_\eta(aHu)s_\eta(abu)$ und $g_\vartheta(\theta gu)g_\nu$.

Formenreihe $(H_\vartheta(\vartheta\eta x), s, u)^3$: Reduzent $((\vartheta\nu x)^2, s, u)^2 s_\nu$.

6. $(H_\vartheta(\theta Hu), s, u)$ zerfällt durch einmalige Faltung mit der zerfallenden Form $(\theta_\nu(\vartheta\nu x), s, u)$ nach § 3. 2), c); d. h. durch doppelte Reduktion der niedrigeren zerfallenden Form $(H_\vartheta su)^2$:*)

$$0 \equiv \theta_\nu(\vartheta\nu\nu_1)(\theta su) + \frac{2}{3}\theta^2_\nu(\vartheta\nu_1 x)(\theta su) + \theta_\nu(\vartheta\nu x)(\theta su)s_{\nu_1}$$

$$\equiv -\frac{1}{2}H_\vartheta(\theta Hu)(\theta su) + \theta_\eta(\theta su)(Hsu) + \frac{1}{2}H_\vartheta(\theta su)(Hsu)$$

$$\equiv -\frac{1}{2}H_\vartheta(\theta Hu)(\theta su) + \theta_\eta(\theta su)(Hsu) + \frac{1}{2}[H_\vartheta]^2_{su} - \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}H_\vartheta(\theta Hu)(\theta su)$$

$$\equiv -\frac{3}{5}H_\vartheta(\theta Hu)(\theta su).$$

*) Das Zeichen $\equiv$ bedeutet, daß Produkte von Formen niedrigeren Grades ausgelassen sind.

Durch doppelte Reduktion entstehen nach 1. und 5. die Formeln:

$$(31.)\quad \begin{aligned} 0 &= \theta_\eta(\theta s u)(H s u)^2 + \frac{1}{4} H_\vartheta(\theta H u)(\theta s u)^2 - \frac{3}{4}\theta_\eta(\theta H u)(\theta s u)(H s u) \\ &\quad - \frac{5}{4}\theta_\eta(\theta H u)^2(\theta s u) - (a s u)^3 \cdot b_\eta (b H u)^2 - a_\nu (a s u)^3 \cdot b_\nu^2, \\ 0 &= H_\vartheta(\theta H u)(\theta s u)^3 - 7\,\theta_\eta(\theta H u)(\theta s u)^2 (H s u), \\ 0 &= a_\nu (a s u)^2 b_{\nu_1}^{\,2} (b s u)^2 - \theta_\eta(\theta s u)^2 (H s u)^2 + 6\,\theta_\eta(\theta H u)(\theta s u)^2 (H s u), \\ 0 &\equiv (H_\vartheta(\vartheta \eta x), s, u), \qquad 0 \equiv H_\vartheta(\widehat{\vartheta\eta} s u)(H s u) - 4\,\theta_\eta^2 (H s u). \end{aligned}$$

Folgerungen:

1) $(\theta H u)^2 s_\eta$, $H_\vartheta(\theta H u)\, s_\eta$, $\theta_\eta(\theta H u)\, s_\eta$, $H_\vartheta(\vartheta\eta x)\, s_\eta$, $\theta_\eta(\vartheta\eta x)\, s_\eta$, $(H_\vartheta(\vartheta\eta x), s, u)$, $(\theta_\eta(\vartheta\eta x), s, u)^2$ **sind Reduzenten.**

2) s^2 **tritt nicht in Faltung mit den Formen** $(5, \lambda)$ **usw. 6. Ordnung.**

§ 24. *Formen 11. Ordnung* (*System* s_{III}).

Faltung von s **mit den Formen 7. Ordnung (System III) (§ 12).**

Irreduzible Formen:

A)

.	.	.	$((KHu)^2 su)^2$	❋
.	.	$(K_\eta s u)^2$	.	
.	.	.	.	.
$((k\eta x)^3, s, u)$	.	.	.	.
.	$(K_\eta(k\eta x)^3, s, u)$	.	.	.

❋	$((KHu)^2, s, u)^3$	$((KHu)^2, s, u)^4$
	.	$(K_\eta(KHu)^2, s, u)^3$,

B) $((j\eta x), s, u)^2$, $(H_j s u)$ | $((j\eta x), s, u)^3$, C) $(\varDelta_\eta s u)$,

D)

.	$((aLu)^2, s, u)^2$, $((aLu)^3, s, u)$	$((aLu)^2, s, u)^3$
$(aLu)^2 s_\iota$, $(a_\iota s u)^2$	$(a_\iota s u)^3$	$(a_\iota(aLu)^2, s, u)^2$.

Reduktionen:

A) **Reduktion oder Zerfallen durch einmalige Faltung mit den entsprechenden Formen in Symbolen** $\theta \cdot H$.

$(K_\eta (KHu)^2, s, u)$ **und** $(K_\eta (KHu)^2, s, u)^2$: **Zerfallen nach § 3. 2), a), durch Faltung mit** $K_\nu^2 (Ksu)$, $K_\nu^2 (Ksu)^2$.

$(K_\eta (KHu), s, u)^4 \equiv (a_\nu^2 \cdot \theta_{\nu_1}, s, u)^4$: **Zerfallen nach § 3. 2), b), aus der zerfallenden Form** $K_\nu^2 (Ksu)^3$.

B) **Formenreihe** $(j\eta x) s_\eta$: **Reduzent** $(j\nu x)^2 s_\nu$.

Form $H_j (\widehat{j\eta} su)(Hsu)$: **Reduzent** $(j\nu x)(\widehat{j\nu} su)^2$.

Form $H_j (j\eta x)(Hsu)$: **Zerfällt durch Reduktion der zerfallenden Form** $((j\eta x)^2, s, u)^2$ **durch den Reduzenten** $(j\nu x)^2 s_\nu$ **(Formel (18.) a):**

$$0 = -2 (j\nu x)^2 s_\nu s_{\nu_1} = [(j\eta x)^2]_{\widehat{su}^2} + H_j (j\eta x)(Hsu).$$

C) **Reduzenten** $\Delta_\nu s_\nu$ **und** $\Delta_\nu (\Delta su)^2$.

D) **Reduktion und Zerfallen durch einmalige Faltung mit den entsprechenden Formen in Symbolen** $f \cdot H$.

E) **Aus (30.) c ergibt sich die Reduktion der zerfallenden Formenreihe** $(a_\sigma su)^2$:

$$0 = a_\eta (Hsu)^2 (as\widehat{\nu x})^2 = a_\eta (Hsu)^2 (a\widehat{\nu\eta} u)^2 + 2 a_\eta (a\widehat{\nu\eta} u)(\widehat{\nu\eta} su)(Hsu)^2 = \frac{1}{3} a_\sigma (asu)^2,$$

$$0 = a_\eta a_\nu (Hsu)^2 (as\widehat{\nu x})(asu) = a_\eta (a\widehat{\nu\eta} u)^2 (Hsu)^2 (asu) + a_\eta (a\widehat{\nu\eta} u)(\widehat{\nu\eta} su)(Hsu)^2 (asu)$$
$$= \frac{1}{3} a_\sigma (asu)^3.$$

Folgerung:

s^2 **tritt nicht in Faltung mit den Formen 7. Ordnung ein.**

§ 25. *Formen 12., 13., 14., 15. Ordnung (System* s_{III}*).*

Faltung von s **mit den Formen 8., 9., 10., 11. Ordnung (System III) (§ 13—16).**

Irreduzible Formen:

12. Ordnung.

A) $((\vartheta^2 \eta x)^4_{\cdot}, s, u) \,|\, \theta_\eta (\vartheta^2 \eta x)^3 s_\vartheta$, B) $((aHu) H_j, s, u)^2 \,|\, ((aHu) H_j, s, u)^3$,

$$\text{C)}\quad \begin{array}{c|c|c} \cdot & ((\theta L u)^2, s, u)^2, ((\theta L u)^3, s, u) & ((\theta L u)^2, s, u)^3 \\ (\theta_\iota s u)^2 & \cdot & (\theta_\iota (\theta L u)^2, s, u)^2. \end{array}$$

Reduktionen: Die durch direkte Faltung mit Reduzenten oder zerfallenden Formen entstehenden Reduktionen sollen nicht mehr erwähnt werden.

B) Zerfallen von $((aHu)H_j, s, u)$ und $(a_\eta (aHu) H_j, s, u)$ als Überschiebung über Funktionaldeterminanten.

Zerfallen von $(a_\eta (aHu) H_j, s, u)^2$: Doppelte Reduktion der zerfallenden Form $[\theta_\nu \cdot \theta'^3_{\nu_1}]_{\widehat{su}^3}$ (§ 13. C)

$$0 \equiv [\theta'^3_{\nu_1} \cdot \theta_\nu]_{\widehat{su}^3} \equiv -\frac{3}{4}\theta_\nu (\theta s u)^2 (\theta \theta' u)\theta'^3_{\nu_1}$$
$$\equiv -\frac{9}{8}(\widehat{\theta\theta'}\eta \widehat{su})(\theta\theta' u)(\theta H u)(\theta' H u)\theta'_\eta (\theta s u) \equiv -\frac{3}{8} a_\eta (aHu) H_j (asu)^2.$$

C) Aus den Formeln (31.) ergibt sich die Reduktion der zerfallenden Formen

$[L_\vartheta (\theta L u)]_{\widehat{su}^3}$ und $[\theta_\iota (\theta L u)]_{\widehat{su}^3}$, d. h. der Produkte $[\theta^2_\nu \cdot H]_{\widehat{su}^3}$ und $[a^2_\nu \cdot (bHu)^2]_{\widehat{su}^3}$:

$$(32.)\quad \begin{aligned} &0 \equiv \theta^2_\nu (\theta s u)^2 (Hsu),\quad 0 \equiv [L_\vartheta (\theta L u)]_{\widehat{su}^4} - 7[\theta_\iota (\theta L u)]_{\widehat{su}^4}, \\ &0 \equiv a^2_\nu (asu)^2 (bHu)^2 (bsu) + 6\,\theta_\iota (\theta L u)^2 (\theta s u)(Lsu), \\ &0 \equiv \theta^3_\nu (\theta s u)(Hsu)^2 \text{ aus } 0 \equiv \theta^2_\iota (\theta L u)(\theta s u)(Lsu)^2 \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad (\text{Reduzent } a^2_\eta (Hsu)^2). \end{aligned}$$

Irreduzible Formen.

13. Ordnung.

A) $((KLu)^3, s, u)^2$; $((KLu)^3, s, u)^3$,
B) $(L_j\, s\, u)^2$,
C) $((aH^2u)^3, s, u)^2$.

14. Ordnung.

A) $((aLu)^2 L_j, s, u)^2$,
B) $((\theta H^2 u)^3, s, u)^2$.

15. Ordnung.

$$((KH^2u)^4, s, u)^2.$$

Reduktionen: Zerfallen von $(K_\iota(KLu)^3, s, u)^2$, $(H_\vartheta(\theta H^2u)^3, s, u)$, $((K, H\cdot L, u)^5, s, u)$ nach § 3. 2), c); d. h. unter gleichzeitiger Betrachtung der zerfallenden Formen $(K_\iota(KLu)^2, s, u)^3$, $(H_\vartheta(\theta H'u)^2, s, u)^2$, $((K, H\cdot L, u)^4, s, u)^2$.

Folgerung: s^2 tritt nicht mit einzelnen Formen von System III in Faltung ein.

§ 26. *System* s_{IV}.

1) *Faltung von s mit System* I · III.

Reduktionen: Nach den Reduktionen der letzten Paragraphen $(a_\nu^2 s_\nu, (aHu)^2(asu)s_\eta$ usw.) lassen die Formen $(0, \lambda)$, $(1, \lambda)$, $(2, \lambda)$ nicht die Faltungen I und III gleichzeitig zu; f, $\varDelta$, N tritt also nach § 18, zur Bildung von System s_{IV}, nicht in Produkten in Faltung ein.

j tritt nicht in Faltung ein, da nach den gleichen Reduktionen den zu j kontragredienten Faltungen

$$(K_\nu(k\nu x)^3, s, u),\ ((\vartheta^2\eta x)^4, s, u) \text{ usw.}$$

die zu j kogredienten Faltungen entsprechen:

$$K_\nu(k\nu x)^2 s_k,\ (\vartheta^2\eta x)^3 s_\vartheta \text{ usw.}$$

2) *Faltung von s mit System* II · III
d. h. von s mit $H\cdot(1, \lambda)$, $H\cdot(2, \lambda)$, $H\cdot(3, \lambda)$.

Irreduzible Formen:

A) $(a_\nu\cdot H, s, u)^4$, $((aHu)^2\cdot H, s, u)^3$, $((aHu)^2\cdot H, s, u)^4$,
$((aLu)^2\cdot H, s, u)^4$, $((aLu)^3\cdot H, s, u)^3$, $((aH^2u)^3\cdot H, s, u)^4$.

B) $(a_\nu^2\cdot H, s, u)^3$, $(a_\eta(aHu)^2\cdot H, s, u)^3$, $(a_\iota(aLu)^2\cdot H, s, u)^4$.

C) $(\theta_\nu \cdot H, s, u)^4$, $((\theta Hu)^2 \cdot H, s, u)^3$, $((\theta Hu)^2 \cdot H, s, u)^4$,
$((\theta Lu)^2 \cdot H, s, u)^4$, $((\theta Lu)^3 \cdot H, s, u)^3$, $((\theta H^2 u)^3 \cdot H, s, u)^4$.

D) $(\theta_\eta (\theta Hu)^2 \cdot H, s, u)^3$, $(\theta_\iota (\theta Lu)^2 \cdot H, s, u)^4$.

E) $((KLu)^3 \cdot H, s, u)^4$, $((KH^2u)^4 \cdot H, s, u)^4$.

F) $((j\nu x)^2 \cdot H, s, u)^3$, $((j\nu x)^2 \cdot H, s, u)^4$, $((j\eta x) \cdot H, s, u)^4$, $(H_j \cdot H, s, u)^3$,
$(L_j \cdot H, s, u)^4$.

Reduktionen: ν **tritt analog wie** j **nicht in Faltung ein.**

B) und D). $(a_\nu^2 . H, s, u)^4$ **und** $(\theta_\nu^2 \cdot H, s, u)^4$ **zerfallen aus Formel (27.)c) und (29.)c) unter Berücksichtigung von** $(gHu)^2 = -\frac{1}{3} s \cdot \sigma$:

$$(a_\nu^2 \cdot H, s, u)^4 \equiv \frac{1}{3} (asu)^4 \cdot \sigma, \quad (\theta_\nu^2 \cdot H, s, u)^4 \equiv -\frac{1}{6} (\theta su)^4 \cdot \sigma;$$

daraus Zerfallen von $(a_\eta (aHu) \cdot H, s, u)^4$, $(\theta_\eta (\theta Hu) \cdot H, s, u)^4$.

$$(\theta_\nu^2 \cdot H, s, u)^3, \ (\theta_\nu^3 \cdot H, s, u)^3 \text{ und daraus } (\theta_\eta^2 (\theta Hu) \cdot H, s, u)^4$$

zerfallen nach § 25, Formen 12. Ordnung C).

3) *Faltung von s mit System* **III · III,**
d. h. von s **mit Formen von System III:** $(3,\lambda)\cdot(3,\lambda)$, $(3,\lambda)\cdot(2,\lambda)$, $(3,\lambda)\cdot(1,\lambda)$,
$(2,\lambda)\cdot(2,\lambda)$, $(2,\lambda)\cdot(1,\lambda)$,
$(1,\lambda)\cdot(1,\lambda)$.

Irreduzible Formen:

A) $(a_\nu^2 \cdot a_\nu^2, s, u)^3$, $(a_\nu^2 \cdot a_\nu^2, s, u)^4$, $(a_\nu^2 \cdot a_\eta (aHu)^2, s, u)^3$.

B) $(a_\nu \cdot H_j, s, u)^4$, $((aHu)^2 . H_j, s, u)^3$, $((aLu)^2 \cdot H_j, s, u)^4$,
$((aLu)^3 \cdot H_j, s, u)^2$, $((aH^2u)^3 \cdot H_j, s, u)^3$.

Reduktionen:

Produkte II · III sollen, bei gleicher Ordnung in Symbolen ν und f, als höher gelten wie Produkte III · III.

Die Reduktionen entstehen zum Teil durch Relationen zwischen Produkten (Syzygien), zum Teil durch Ersetzen der Produkte durch die entsprechenden zerfallenden Formen und Reduktion der Faltung dieser Formen mit s. (Produkte, die Kontravarianten enthalten, sind stets ausgelassen, da sie in Produkte übergehen.)

A) f quadratisch, Symbole ν in beliebiger Ordnung.

Nach § 11, Formeln (12.) und durch analoge Rechnung gilt:

1) $0 = a_\nu \cdot b_{\nu_1} + \frac{1}{2} f \cdot (aHu)^2 - \frac{1}{4} \theta \cdot H + \frac{1}{2} u_x H_\vartheta - \frac{1}{4} u_x^2 \cdot H_\vartheta^2,$

2) $0 = a_\nu \cdot b_{\nu_1}^2 + f \cdot a_\eta (aHu)^2 - \theta_\eta - \frac{1}{2} H_\vartheta,$

3) $0 = a_\nu^2 \cdot b_{\nu_1}^2 - H_\vartheta^2 + 2\,\theta_\eta^2.$

Daraus folgt:

4) $0 = a_\nu^2 \cdot b_{\nu_1}^2 (j \nu_1 x)$ **(aus 3)),**

5) $L_\vartheta(\theta L u) = -\,a_\nu \cdot b_\eta (bHu)^2 + \frac{3}{4} a_\nu^2 \cdot (bHu)^2 + \frac{3}{4} \theta_\nu^2 \cdot H$ **(aus 2)),**

6) $L_\vartheta(\theta L u) = -6\,a_\nu \cdot b_\eta (bHu)^2 + 2\,a_\nu^2 \cdot (bHu)^2 - \frac{1}{2} \theta_\nu^2 \cdot H$ **(aus 1)),**

7) $0 = a_\nu \cdot (bHu)^2 + f \cdot (aLu)^3 + \theta_\nu \cdot H$ **(aus 1)),**

$$\left.\begin{aligned} &8)\quad 0 = a_\nu \cdot (bLu)^3 + \frac{3}{4} (\theta Hu)^2 \cdot H \\ &9)\quad 0 = (aHu)^2 \cdot (bHu)^2 + 2\,(\theta Hu)^2 \cdot H \end{aligned}\right\} \text{(aus 7)),}$$

10) $0 = a_\eta (aHu)^2 \cdot b_\eta (bHu)^2$ **(aus 5) und 6)),**

11) $0 = [a_\nu^2 \cdot b_\eta (bHu)]_{\widehat{su}}.$ **(aus Formel (30.) b)).**

Die Reduktionen von

$$(H_\vartheta\, s u)^4,\ (L_\vartheta(\theta L u), s, u)^3,\ (L_\vartheta(\theta L u), s, u)^4$$

(Formeln (31.) und (32.)) geben zusammen mit den Formeln 1) bis 11) die Reduktion aller Faltungen von s mit Produkten, die in den Symbolen f quadratisch, ν beliebig sind.

B) Produkte von je zwei der Symbole f, θ, j; ν in beliebiger Ordnung.

Nach den Formeln (17.), (18.), (20.) und durch direkte Rechnung gelten die Relationen:

$$\left.\begin{array}{ll} 1) & 0 = a_\nu \cdot \theta_{\nu_1} + \frac{1}{4}\theta \cdot (a H u)^2 + \frac{1}{4} f \cdot (\theta H u)^2, \\ 2) & 0 = \theta_\nu \cdot \theta_{\nu_1} + \frac{1}{2}\theta \cdot (\theta H u)^2 \end{array}\right\} \text{(direkte Rechnung analog A 1)).}$$

Daraus folgt:

$$\left.\begin{array}{ll} 3) & 0 = 3 a_\nu \cdot (\theta H u)^2 + \theta \cdot (a L u)^3 + 2 f \cdot (\theta L u)^3 \\ 4) & 0 = 3\theta_\nu \cdot (a H u)^2 + f \cdot (\theta L u)^3 + 2\theta \cdot (a L u)^3 \end{array}\right\} \text{(aus 1) und A 6)),}$$

5) $0 = a_\nu \cdot (\theta L u)^3,\ 0 = \theta_\nu \cdot (a L u)^3,\ 0 = (a H u)^2 \cdot (\theta H u)^2$ (aus 3), 4) und A 8)),

6) $0 = a_\nu \cdot \theta_\nu^2 + \theta_\nu \cdot a_\nu^2 + f \cdot \theta_\eta (\theta H u)^2 + \theta \cdot a_\eta (a H u)^2$ (Formel (17.)),

7) $0 = \theta_\nu \cdot \theta_\nu^2 + \theta \cdot \theta_\eta (\theta H u)^2 + \frac{1}{6} f \cdot H_i$ [analoge Ableitung wie von 6) aus $\theta_\nu^2 (\theta \theta' \widehat{\nu_1 x})$].

Daraus folgt:

8) $0 = a_\nu \cdot (j \nu x)^2 + f \cdot H_j$ (aus 6)),

9) $0 = (a H u)^2 \cdot (j \nu x)^2 - 2 a_\nu \cdot H_j$ (aus 8)),

10) $0 = \theta_\nu \cdot (j \nu x)^2,\quad 0 = \theta \cdot H_j$ (aus 7) und 8)),

$$\left.\begin{array}{ll} 11) & 0 = a_\nu \cdot \theta_i^3 - \frac{3}{4}(j \eta x)^2 \\ 12) & 0 = a_\nu^2 \cdot \theta_\nu^2 - \frac{1}{3}(j \eta x)^2 - \frac{1}{3}(\varDelta H u)^2 \end{array}\right\} \text{(Formel (18.)),}$$

13) $0 = a_\nu^2 \cdot \theta_\nu^3 - \frac{1}{2} a_\sigma$ (Formel (20.)),

14) $0 = \theta_\nu \cdot \theta_\nu^3, \quad 0 = a_\eta H_j$ (§ 13. C)).

Die Formeln sind so weit geführt, bis die Produkte polarisierbar werden; d. h. daß durch Faltung nur *ein* neues Produkt entsteht dadurch, daß

a) die Faltung des Produktes in sich reduzibel wird,

b) die übrigen durch Faltung entstehenden Produkte reduzibel werden oder auf Kontravarianten führen (vgl. § 3. 2), a) und b)).

Formeln 1) bis 5) geben die Reduktion aller Faltungen von s mit Produkten, die aus $a_\nu \cdot \theta_\nu$ durch Faltung entstehen,

Formeln 6) bis 10) die Reduktion derjenigen Produkte, die aus $a_\nu \cdot \theta_\nu^2$ durch Faltung entstehen.

Nach § 24 A) zerfallen, unter Berücksichtigung von Formeln 6) bis 10), die Faltungen von s mit Produkten, die aus $a_\nu^2 \cdot \theta_\nu$ entstehen.

Es wird:

$$0 \equiv a_\nu^2 (asu)^2 \theta_{\nu_1} (\theta su)^2, \quad 0 \equiv a_\nu^2 (asu) \theta_{\nu_1} (\theta su)^3 - K_\eta (KHu)^2 (Ksu)^3,$$

$$0 \equiv a_\nu^2 (asu)^2 \theta_{\nu_1} (\theta su), \quad 0 \equiv a_\nu^2 (asu) \theta_{\nu_1} (\theta su)^2,$$

$$0 \equiv a_\nu^2 (asu) \theta_{\nu_1} (\theta su).$$

Die Reduzenten:

$((j\eta x)^2, s, u)^3$ [aus $(\vartheta \eta \widehat{su})^2 (Hsu)$. § 23. C 3)],
$(H_j (j\eta x), s, u)^2$ [§ 24, B], $((\varDelta H u)^2, s, u)^2$ [§ 24, C],
$(a_\sigma s u)^2$ [§ 24, E]

geben zusammen mit den Formeln 11) bis 14) die Reduktion aller aus $a_\nu \cdot \theta_{\nu_1}^3$, $a_\nu^2 \cdot \theta_{\nu_1}^2$, $a_\nu^2 \cdot \theta_{\nu_1}^3$ entstehenden Produkte.

Unsere bisherigen Rechnungen lassen sich zusammenfassen in der

Schlußfolgerung:

Das relativ vollständige System mod (ϱ, t) besteht aus folgenden 331 Formen und Teilsystemen, die wir anschließend auch tabellarisch geordnet wiedergeben:

u_x	1 Form	Relativ vollständiges System mod (s, ϱ, t) [s. Tabelle I].
System I	6 Formen	
System II	5 Formen	
System III	117 Formen	

s	1 Form	[s. Tabelle II].
System s_I	35 Formen	
System s_{II}	9 Formen	
System s_{III}	125 Formen	
System s_{IV}	32 Formen	

16	17	18	19	20	21
	$\theta_l(\vartheta \cdot k, lx)^5$				$(\vartheta^2 l x)^6$
$\eta, x)^4$		$(\vartheta k, l, x)^5$			

9	
$s_n\,(Nsu)$ $(\vartheta \nu x)^2 s_\nu$	$((k$ $(K_\nu$
s_k $(\theta_\eta(\vartheta \eta x)^2, s, u)$	
$((k\nu x)^2, s, u)^2$	$((\vartheta$
$(\Delta_\eta su)$	

23	$((KH^2u)_4 \cdot H, s, u)_4$	$((aH^2u)_2 \cdot H, s, u)_2$	
22			
21	$((\theta H^2 u)_2 \cdot H, s, u)_4$ $((aLu)_2 \cdot H_j, s, u)_4$		
20		$((KLu)_2 \cdot H, s, u)_4$	$((aLu)_2 \cdot H_j, s, u)_2$
19	$((aH^2u)_2 \cdot H, s, u)_4$ $(L_j \cdot H, s, u)_4$		
18		$((\theta Lu)_2 \cdot H, s, u)_4$ $((\theta Lu)_2 \cdot H, s, u)_2$ $((aHu)_2 \cdot H_j, s, u)_2$	
17	$(\theta_l(\theta Lu)_2 \cdot H, s, u)_4$		$((KH_2u)_4, s, u)_2$
		$((aLu)_2 \cdot H_j, s, u)_2$	

10	11	12	13	14	15	16
	s_n	$(k\nu x)^3 s_\nu$	$(\vartheta^2 \nu x)^3 s_\nu s_\vartheta$ $\theta_\nu (\vartheta^2 \nu x)^3 s_\vartheta$		$\theta_\eta (\vartheta^2 \eta x)^3 s_\vartheta$	
$- x)^3, s, u)s_\nu$ $(k\nu x)^3, s, u)$		$(K_\eta (k\eta x)^3, s, u)$		$(\vartheta^2 \nu x)^3 s_\nu$		$((\vartheta^2 \eta x)^4, s, u)$
	$(k\nu x)^3 s_\nu$ $((k\nu x)^3, s, u)$		$((k\eta x)^3, s, u)$			
$- \eta x)^2, s, u)$						

Über die Klassenzahlen *Abel*scher Zahlkörper.

Von Herrn *Ph. Furtwängler* in Aachen.

---

*E. E. Kummer**) hat die Richtigkeit des folgenden Satzes behauptet: Sind k und K zwei Unterkörper des Körpers der m-ten Einheitswurzeln, wo m eine ungerade Primzahl bedeutet, und ist k in K enthalten, so ist auch die Klassenzahl von k ein Teiler der Klassenzahl von K. Der von *Kummer* für diesen Satz versuchte Beweis ist nicht stichhaltig, wie bereits Herr *D. Hilbert***) bemerkt hat. Der Satz ist aber, wie im folgenden gezeigt werden soll, in der Tat richtig und läßt sich auch auf den Fall ausdehnen, daß m eine Potenz einer Primzahl ist.

Es seien also k und K zwei Unterkörper des Körpers der m-ten Einheitswurzeln, wo m eine Potenz einer Primzahl bedeutet, und h, H seien bzw. die Klassenzahlen von k, K. Für die Definition der Klassenzahl soll der schärfere Äquivalenzbegriff zugrunde gelegt werden, nach dem zwei Ideale nur dann äquivalent heißen, wenn ihr Quotient als total positive Körperzahl darstellbar ist. Selbstverständlich kann das nur auf die in h und H aufgehenden Potenzen von zwei einen Einfluß haben. Es ist nun nachzuweisen, daß unter den angegebenen Voraussetzungen h ein Teiler von H ist.

Es sei zu diesem Zwecke p eine beliebige Primzahl und es seien p^a, bzw. p^A die höchsten Potenzen von p, die in h, bzw. H aufgehen. Es ist

---

*) Dieses Journal Bd. 40 (1850), S. 114.

**) Bericht über die Theorie der algebr. Zahlkörper, S. 378. *Kummer* macht die unrichtige Annahme, daß zwei nicht äquivalente Ideale des Unterkörpers auch im Oberkörper nicht äquivalent seien.

dann zu zeigen, daß a stets kleiner oder höchstens gleich A ist. Wir unterscheiden bei diesem Nachweise zwei Fälle, je nachdem der Relativgrad von K in bezug auf k, der mit g bezeichnet sei, zu p relativ prim ist oder nicht.

Ist der Relativgrad g zu p relativ prim und sollte die Klassenzahl von k durch eine höhere Potenz von p teilbar sein als die von K, so müßte es ein Ideal j in k geben, das in k den Bedingungen

$$j \not\sim 1, \; j^p \sim 1 \text{ in } k$$

genügt und das in K in die Hauptklasse übergeht. Aus

$$j \sim 1 \text{ in } K$$

würde dann durch Bildung der Relativnorm in bezug auf k folgen:

$$j^g \sim 1 \text{ in } k.$$

Daraus würde sich aber in Verbindung mit der Äquivalenz $j^p \sim 1$ in k, da g und p relativ prim sind, ergeben, daß j in k selbst in der Hauptklasse liegen müßte, was unserer obigen Annahme widerspricht. Es kann daher in dem vorliegenden Falle die Klassenzahl von k nicht durch eine höhere Potenz von p teilbar sein als diejenige von K.

Es sei zweitens der Relativgrad g durch p teilbar. Wir wollen zeigen, daß auch in diesem Falle die Annahme, daß $p^a > p^A$ sei, zu einem Widerspruch führt, wozu die Theorie des *Klassenkörpers* herangezogen werden muß. Die Körper k und K sind *Abel*sche Körper; es läßt sich daher K dadurch erzeugen, daß man sukzessive zu k Körper adjungiert, von denen jeder in bezug auf den vorhergehenden relativ zyklisch von Primzahlrelativgrad ist. Da nun bei der Adjunktion eines Körpers, dessen Relativgrad in bezug auf den vorhergehenden zu p prim ist, die Klassenzahl, wie oben gezeigt ist, keinen Faktor p verlieren kann, so müßte es bei unserer Annahme zwischen k und K zwei Körper k' und K' mit folgenden Eigenschaften geben: K' ist relativ zyklisch vom Relativgrad p in bezug auf k', und sind bzw. $p^{a'}$ und $p^{A'}$ die höchsten Potenzen von p, die in den Klassenzahlen von k' und K' bzw. aufgehen, so ist $a' > A'$. Es müßte also bei dem Übergange von k' nach K' die Klassenzahl mindestens *einen* Faktor

p verlieren. Das ist unmöglich, wie jetzt nachgewiesen werden soll. Ist die Klassenzahl von k' durch $p^{a'}$ teilbar, so gibt es in bezug auf k' einen unverzweigten relativ *Abel*schen Körper vom Relativgrad $p^{a'}$*). Dieser ist auch in bezug auf K' unverzweigt; und zwar ist er in bezug auf K' entweder vom Relativgrad $p^{a'}$ oder p^{a-1}. Das letztere kann nur dann eintreten, wenn K' selbst in bezug auf k' unverzweigt ist. Existierte nun in bezug auf K' ein unverzweigter relativ *Abel*scher Körper vom Relativgrad $p^{a'}$, so müßte die Klassenzahl von K' mindestens durch $p^{a'}$ teilbar sein**); es könnte also die Klassenzahl bei dem Übergange von k' nach K' keinen Faktor p verlieren. Es bliebe daher nur die Möglichkeit, daß K' selbst in bezug auf k' unverzweigt wäre. Das kann aber auch nicht sein; denn k' und K' sind beide Unterkörper des Körpers der m-ten Einheitswurzeln k_m, und ein solcher Körper besitzt, wenn m eine Potenz einer Primzahl ist, keine zwei Unterkörper, von denen der eine unverzweigt in bezug auf den andern ist. Ist nämlich $m = l^h$, wo l eine Primzahl bedeutet, so wird l in k_m die $l^{h-1}(l-1)$-te Potenz eines Primideals $\mathfrak{L}$***). Da der Grad des Körpers k_m ebenfall gleich $l^{h-1}(l-1)$ ist, so geht $\mathfrak{L}$ in der Relativdiskriminante irgendeines Unterkörpers von k_m in bezug auf einen anderen Unterkörper auf, und es ist daher keine Unverzweigtheit möglich.

Hiermit ist die Richtigkeit unserer Behauptung allgemein nachgewiesen, die wir im folgenden Satz noch einmal formulieren:

Satz. Sind k und K zwei Unterkörper des Körpers der m-ten Einheitswurzeln, wo m eine Potenz einer Primzahl bedeutet, und ist k in K enthalten, so ist die Klassenzahl von k ein Teiler der Klassenzahl von K. Für die Definition der Klassenzahl gilt der schärfere Äquivalenzbegriff, nach dem zwei Ideale dann äquivalent heißen, wenn ihr Quotient als total positive Körperzahl darstellbar ist.

Der Satz bleibt nicht mehr allgemein richtig, wenn m durch verschiedene Primzahlen teilbar ist, wie ein einfaches Beispiel zeigt. Wäre er richtig, wie auch m beschaffen sei, so würde er, da jeder *Abel*sche Körper

*) Vgl. den allgemeinen Beweis für die Existenz des Klassenkörpers, den ich in drei Mitteilungen erbracht habe, die in den Gött. Nachr. 1903 und 1904 erschienen sind.

**) Vgl. *Ph. Furtwängler*, Eine charakteristische Eigenschaft des Klassenkörpers, 1. und 2. Mitteilung, Gött. Nachr. 1906 und 1907.

***) Vgl. *D. Hilbert*, Bericht über die Theorie der algebraischen Zahlkörper, S. 331, Satz 120.

ein Kreiskörper ist, für zwei beliebige *Abel*sche Körper k und K, von denen der erste im zweiten enthalten ist, gelten. Man kann aber leicht zwei solche Körper angeben, für die er nicht gilt. Wir nehmen für k den quadratischen Körper $(\sqrt{-5})$ und für K den Körper $(\sqrt{-1}, \sqrt{-5})$. Die Klassenzahl von $(\sqrt{-5})$ ist durch 2 teilbar, die Klassenzahl von $(\sqrt{-1}, \sqrt{-5})$ ist dagegen ungerade. Unser Satz gilt also für diese beiden Körper nicht, obwohl beide Unterkörper des Körpers der 20. Einheitswurzeln sind. Es liegt dies daran, daß der Körper $(\sqrt{-1}, \sqrt{-5})$, der der Klassenkörper von $(\sqrt{-5})$ ist, unverzweigt in bezug auf $(\sqrt{-5})$ ist.

Zur Theorie der *Dirichlet*schen Reihen.

Von Herrn *Oskar Perron* in München.

(Mit 4 Textfiguren.)

Von den Sätzen, welche ich im folgenden beweise, sind die meisten insofern nicht neu, als sie schon mehrfach ausgesprochen worden sind; indessen genügen die bis jetzt gegebenen Beweise keineswegs den Forderungen mathematischer Strenge. Es handelt sich dabei vor allem um den in der analytischen Zahlentheorie häufig angewandten Satz, daß eine Funktion, wenn überhaupt, jedenfalls nur auf *eine* Weise in eine *Dirichlet*sche Reihe entwickelt werden kann. Indem ich diesen Satz streng beweise, und zwar in einer erheblich schärferen Fassung, ergibt sich zugleich eine bemerkenswerte notwendige, wenn auch nicht hinreichende Bedingung dafür, daß eine Funktion überhaupt durch eine *Dirichlet*sche Reihe darstellbar ist. Weiter handelt es sich um eine Reihe von Formeln, welche sich mit unzureichendem Beweise bereits in der großen Arbeit des Herrn *Cahen* finden, die zum erstenmal die Grundlagen der *Dirichlet*schen Reihen als Funktionen komplexen Arguments mit Erfolg behandelt.*) Auf die empfindlichen Lücken der *Cahen*schen Beweisführung ist schon mehrfach in der Literatur hingewiesen worden, so erst jüngst wieder von Herrn *Landau***), ohne daß es bis jetzt gelungen wäre, sie zu beseitigen. Durch meine Untersuchungen werden nun die *Cahen*schen Resultate im allgemeinen bestätigt, zum Teil aber auch als unrichtig nachgewiesen.

---

*) Sur la fonction $\zeta(s)$ de *Riemann* et sur des fonctions analogues. Annales de l'école normale, 3. série, tome 11 (1894).

**) Über die Multiplikation *Dirichlet*scher Reihen. Rendiconti del circolo matematico di Palermo, tomo 24 (1907).

§ 1.

Unter einer *Dirichlet*schen Reihe verstehe ich, wie heute allgemein üblich, jede Reihe der Form

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\lambda_n z}. \tag{1.}$$

Dabei ist z eine komplexe Variable; ebenso sind die Koeffizienten c_n im allgemeinen komplex, während die Exponenten λ_n reell sind und — von positiven oder auch negativen Werten beginnend — monoton ins Unendliche wachsen:

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \cdots \quad ; \lim_{n=\infty} \lambda_n = \infty.$$

Wie Herr *Cahen* a. a. O. bewiesen hat, ist das Konvergenzgebiet einer *Dirichlet*schen Reihe eine Halbebene, welche von einer zur imaginären Achse parallelen Geraden, der Konvergenzgeraden, links begrenzt wird. Die Konvergenzgerade kann auch links oder rechts ins Unendliche fallen, in welchen Fällen dann die Reihe überall bzw. nirgends konvergiert. Die Konvergenz ist im allgemeinen keine absolute, so daß die Reihenfolge der Glieder durchaus festgehalten werden muß. Dagegen konvergiert die Reihe *gleichmäßig* in jedem Gebiet, welches ganz im endlichen liegt und der Konvergenzgeraden nicht beliebig nahe kommt; sie stellt daher eine im Innern ihres Konvergenzgebietes überall reguläre analytische Funktion dar, die wir durch $f(z)$ bezeichnen.

Zur Behandlung der *Dirichlet*schen Reihen bedient man sich mit Vorteil der sogenannten *partiellen Summation*. Es sei ζ ein Wert, für welchen die Reihe konvergiert; setzt man dann

$$\sum_{n=1}^{N} c_n e^{-\lambda_n \zeta} = C_N, \quad C_0 = 0, \tag{2.}$$

so bleiben alle Zahlen $|C_N|$ unter einer von N unabhängigen Schranke:

$$|C_N| < C. \tag{3.}$$

Ferner ist

$$\sum_{n=1}^{N} c_n e^{-\lambda_n z} = \sum_{n=1}^{N} c_n e^{-\lambda_n \zeta} \cdot e^{-\lambda_n (z-\zeta)}$$

$$= \sum_{n=1}^{N} (C_n - C_{n-1})\, e^{-\lambda_n (z-\zeta)}$$

$$= \sum_{n=1}^{N-1} C_n \left(e^{-\lambda_n (z-\zeta)} - e^{-\lambda_{n+1} (z-\zeta)}\right) + C_N e^{-\lambda_N (z-\zeta)}.$$

Bezeichnet man also, wie üblich, den reellen Teil einer Zahl z mit $\Re(z)$, so folgt hieraus, wenn $\Re(z) > \Re(\zeta)$ vorausgesetzt wird:

$$\text{(4.)} \qquad f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \left(e^{-\lambda_n (z-\zeta)} - e^{-\lambda_{n+1} (z-\zeta)}\right) \qquad (\Re(z) > \Re(\zeta)).$$

Diese neue Reihe für $f(z)$ konvergiert absolut; außerdem bemerke ich ausdrücklich, da ich sie später gliedweise integrieren werde, daß auch sie in jedem endlichen Gebiet, welches rechts von der Geraden $\Re(z) = \Re(\zeta)$ liegt und dieser nicht beliebig nahe kommt, *gleichmäßig* konvergiert. Diese Tatsachen folgen zwar ohne weiteres aus den Untersuchungen des Herrn *Cahen*; indes will ich sie doch besonders beweisen, indem ich mich hier, wie auch später, zur Abschätzung der Glieder der Reihe (4.) einer Formel bediene, die zu diesem Zwecke etwas bequemer ist als die des Herrn *Cahen*. Es gilt nämlich die Ungleichung:

$$\text{(5.)} \qquad \left|e^{-\lambda_n s} - e^{-\lambda_{n+1} s}\right| \leq \frac{|s|}{\Re(s)} \left(e^{-\lambda_n \Re(s)} - e^{-\lambda_{n+1} \Re(s)}\right).$$

Diese kann leicht dadurch verifiziert werden, daß man $s = x + iy$ einsetzt und beide Seiten ausrechnet; sie ergibt sich aber auch direkt mit Hilfe der Integralrechnung:

$$\left|e^{-\lambda_n s} - e^{-\lambda_{n+1} s}\right| = \left|\int_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}} s e^{-ts}\, dt\right| \leq |s| \int_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}} \left|e^{-ts}\right| dt$$

$$= |s| \int_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}} e^{-t\Re(s)}\, dt = \frac{|s|}{\Re(s)} \left(e^{-\lambda_n \Re(s)} - e^{-\lambda_{n+1} \Re(s)}\right).$$

Aus der hiermit bewiesenen Ungleichung (5.) ergibt sich nun ohne weiteres die absolute Konvergenz der Reihe (4.), und für den Rest dieser Reihe erhält man die Abschätzung:

$$\left|\sum_{n=N+1}^{\infty} C_n\left(e^{-\lambda_n(z-\zeta)}-e^{-\lambda_{n+1}(z-\zeta)}\right)\right| \leqq C\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{|z-\zeta|}{\Re\,|z-\zeta|}\left(e^{-\lambda_n\Re(z-\zeta)}-e^{-\lambda_{n+1}\Re(z-\zeta)}\right)$$
$$= C\,\frac{|z-\zeta|}{\Re\,(z-\zeta)}\,e^{-\lambda_{N+1}\Re(z-\zeta)},$$

woraus sofort die gleichmäßige Konvergenz für jedes Gebiet $|z-\zeta|\leqq R$, $\Re(z-\zeta)\geqq\delta$ hervorgeht.

§ 2.

Einer der wichtigsten Sätze aus der Theorie der *Dirichlet*schen Reihen ist der, daß zwei verschiedene *Dirichlet*sche Reihen nicht die gleiche analytische Funktion darstellen können, oder was dasselbe sagt, daß eine Funktion sich, wenn überhaupt, doch jedenfalls nur auf eine Weise in eine *Dirichlet*sche Reihe entwickeln läßt. Da die Differenz von zwei *Dirichlet*schen Reihen sich offenbar wieder als *Dirichlet*sche Reihe schreiben läßt, so kann dieser Satz auch so ausgesprochen werden:

Wenn eine Dirichletsche Reihe für alle Werte von z, deren reeller Teil eine gewisse Zahl übertrifft, verschwindet, so sind alle ihre Koeffizienten gleich Null.

Bevor ich den Beweis dieses Satzes in Angriff nehme, will ich zunächst über die bisher gegebenen Scheinbeweise einiges vorausschicken. Da diese sich vielfach auf reelle Werte der Variabeln z beschränken, so wollen sie sogar den folgenden sehr viel mehr aussagenden Satz stützen:

Wenn eine *Dirichlet*sche Reihe für alle *reellen* Werte von z, die eine gewisse Zahl übertreffen, verschwindet, so sind ihre sämtlichen Koeffizienten gleich Null.

Herr *de la Vallée Poussin* verzichtet in seiner Arbeit „Sur la fonction $\zeta(s)$ de *Riemann* et le nombre des nombres premiers inférieurs à une limite donnée"*) auf einen ausführlichen Beweis unseres Satzes und begnügt sich auf S. 65 lediglich mit dem Hinweis „que des exponentielles différentes ne

*) Mémoires couronnés et autres mémoires publiés par l'Académie royale de Belgique, tome 59 (1899).

sont pas du même ordre de grandeur pour s infini". Dies kann jedoch jedenfalls nur besagen, daß

$$\lim_{s=\infty} \frac{e^{-\lambda_{n+1}s}}{e^{-\lambda_n s}} = 0$$

ist. Aber daraus folgt über die Größenordnung des Restes der unendlichen Reihe gar nichts, und man kann sogar behaupten, daß es ganz und gar unmöglich ist, auf die angeführte Tatsache allein einen Beweis des in Rede stehenden Satzes zu gründen. In gleicher Weise würde sich nämlich auch ein gleich zu erwähnender allgemeinerer Satz von *Kronecker* beweisen lassen, den ich tatsächlich als unrichtig nachweisen werde.

Einen ausführlicheren Beweis gibt Herr *Bachmann**). Bei diesem kommt es wesentlich darauf an, zu zeigen, daß eine *Dirichlet*sche Reihe, deren erster Exponent $\lambda_1 = 0$ ist, mit wachsendem z sich unbegrenzt dem Wert ihres Anfangsgliedes nähert. In der Tat konvergieren offenbar die folgenden Glieder, da ihre Exponenten λ_n alle positiv sind, jedes für sich gegen Null. Daß aber auch ihre unendliche Summe gegen Null konvergiert, erschließt Herr *Bachmann* auf folgende Weise. Er beweist zunächst ganz richtig auf Grund der gleichmäßigen Konvergenz die Stetigkeit einer *Dirichlet*schen Reihe für jeden endlichen Argumentwert; dann aber heißt es S. 62: „Man erhält daher (nämlich wegen der Stetigkeit) den Grenzwert der Reihe für einen beliebig großen Wert von z, indem man in ihren einzelnen Gliedern z diesen Wert annehmen läßt, *wodurch aber, wenn z unendlich groß gewählt wird, die Reihe sich auf ihr Anfangsglied reduziert.*" Die kursiv gedruckten Schlußworte enthalten aber eine offenbare petitio principii, zu deren Beseitigung die Stetigkeit für jeden endlichen Argumentwert absolut nichts beiträgt. Hätte Herr *Bachmann* statt dessen die von ihm tatsächlich bewiesene *gleichmäßige Konvergenz für das ganze unendliche Gebiet* $z \geqq \zeta$ herangezogen, so hätte er leicht zu einem einwandfreien Beweis gelangen können, ohne die Stetigkeit zu benutzen, die für diese Frage ganz unerheblich ist.

Einen anderen ebenso anfechtbaren Beweis unseres Satzes hat *Kronecker* gegeben**). Er beschränkt sich dabei auf Reihen der Form

*) Die analytische Zahlentheorie, Leipzig 1894.

**) Vorlesungen über Zahlentheorie, I. Bd. Herausgegeben von *Hensel*, Leipzig 1901.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n^z},$$

setzt also $\lambda_n = \log n$, und setzt außerdem nicht bloß z, sondern auch die Koeffizienten c_n als reell voraus. Alsdann erscheint der Satz als Spezialfall des folgenden von *Kronecker* a. a. O. S. 261 behaupteten allgemeineren (aber unrichtigen) Satzes:

„Es sei

$$F(z) = c_0 f_0(z) + c_1 f_1(z) + c_2 f_2(z) + \cdots$$

eine Reihe, in welcher die Koeffizienten $c_0, c_1, \ldots$ reelle Konstanten, die Multiplikatoren $f_0(z), f_1(z), \ldots$ reelle Funktionen von z sind, und welche die folgenden Eigenschaften besitzen soll:

1. Sie konvergiert unbedingt innerhalb eines Bereiches $z > a$ der Variabeln z*).

2. Alle Multiplikatoren $f_0(z), f_1(z), \ldots$ besitzen innerhalb dieses Bereiches positive Werte.

3. Der Quotient $\frac{f_n(z)}{f_{n-1}(z)}$ zweier aufeinander folgenden Multiplikatoren wird mit wachsendem z unendlich klein.

4. Der Anfangskoeffizient c_0 ist von Null verschieden.

Dann kann $F(z)$ nicht identisch verschwinden, hat vielmehr für genügend große Werte von z das Vorzeichen des Anfangsgliedes $c_0 f_0(z)$".

Der Beweis, den *Kronecker* für diesen Satz gibt, weist indes den Fehler auf, daß aus der aus der obigen Bedingung 3. hervorgehenden Beziehung

$$\lim_{z=\infty} \frac{f_n(z)}{f_1(z)} = 0 \qquad (n = 2, 3, \ldots \infty)$$

gefolgert wird, man könne z so groß wählen, daß der Quotient $\frac{f_n(z)}{f_1(z)}$ für *jedes* n unter eine gegebene Größe herabsinkt, während doch in Wahrheit für jedes einzelne n ein besonderes z erforderlich ist, und diese unendlich vielen z-Werte brauchen keine endliche obere Schranke zu haben. Bei

*) Man beachte hierbei, daß die speziellen *Dirichlet*schen Reihen $\Sigma \frac{c_n}{n^z}$, wenn sie nicht überall divergieren, bekanntlich stets auch ein Gebiet (Halbebene) *unbedingter* Konvergenz haben.

den *Dirichlet*schen Reihen $\left(f_n(z) = \frac{1}{(n+1)^z}\right)$ ist eine solche Schranke allerdings vorhanden, ebenso bei den anderen speziellen Fällen, welche *Kronecker* angibt. Aber eine notwendige Folge der obigen Bedingungen 1. bis 4. ist das nicht.

Der Umstand nun, daß einerseits der *Kronecker*sche Satz in vielen Spezialfällen sicher richtig ist, andererseits aber der von *Kronecker* gegebene Beweis für den allgemeinen Satz nicht ausreicht, legt die Frage nahe, ob der Beweis vielleicht einer Verbesserung fähig ist, oder ob etwa der Satz in seiner Allgemeinheit gar nicht richtig ist. Meine diesbezüglichen Bemühungen führten mich zu dem Resultat, daß der Satz tatsächlich falsch ist. Das folgende einfache Beispiel, bei welchem die Funktionen $f_n(z)$ überdies auch stetig sind, soll dies dartun.

Wir beschränken die Variable z auf positive Werte, wählen also in der Formulierung des Satzes bei Bedingung 1. $a = 0$ oder $a > 0$. Dann setzen wir:

$$f_1(z) = 1; \quad \frac{f_n(z)}{f_{n-1}(z)} = \begin{cases} \frac{z}{n} \text{ für } z \leq n^2, \\ \frac{n^3}{z} \text{ für } z > n^2. \end{cases} \qquad (n = 2, 3, \ldots \infty)$$

Dadurch sind bereits alle Funktionen $f_n(z)$ definiert, bis auf die erste $f_0(z)$. Offenbar sind auch die Bedingungen 2., 3. des *Kronecker*schen Satzes erfüllt, soweit sie sich nicht auf $f_0(z)$ beziehen. Ich behaupte nun, die unendliche Reihe

$$\varphi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$$

konvergiert für alle positiven z, und außerdem ist

$$\lim_{z=\infty} \varphi(z) = \infty.$$

Nehmen wir diese zwei Tatsachen einmal vorläufig als erwiesen an, so definieren wir die Funktion $f_0(z)$ durch die Gleichung

$$f_0(z) = \varphi(z),$$

wodurch jedenfalls auch die auf $f_0(z)$ bezüglichen Bedingungen 2. und 3. erfüllt werden. Die unendliche Reihe

$$F(z)=f_0(z)-f_1(z)-f_2(z)-f_3(z)-\cdots$$

ist dann eine von der Art, wie es im *Kronecker*schen Satz verlangt wird; sie konvergiert absolut, und der Koeffizient von $f_0(z)$ ist nicht Null. Trotzdem ist gemäß unserer Definition von $f_0(z)$ identisch $F(z)=0$, was nicht sein könnte, wenn der Satz von *Kronecker* richtig wäre.

Um nun die oben benutzten Tatsachen über die Reihe $\varphi(z)$ noch nachträglich zu beweisen, sei z irgend ein konstanter, wenn auch beliebig großer, positiver Wert. Der Quotient $\frac{f_n(z)}{f_{n-1}(z)}$ wird dann nach der Definition für hinreichend große Werte von n jedenfalls kleiner als 1, ja sogar ganz beliebig klein. Hieraus folgt aber nach dem *Cauchy*schen Kriterium, daß die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ konvergiert, und zwar absolut, weil ihre Terme schon alle positiv sind. Es bleibt nun noch zu zeigen, daß diese Reihe mit z unbegrenzt wächst.

Zu dem Ende wählen wir z sehr groß und bezeichnen mit $k-1$ die größte in $\sqrt{z}$ enthaltene ganze Zahl. Es ist dann

$$(k-1)^2 \leqq z < k^2,$$

und mit z zugleich wächst auch k ins Unendliche. Außerdem ist offenbar:

$$\varphi(z)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) > f_{k-1}(z),$$

weil die Reihe lauter positive Glieder hat. Nun ist aber nach der Definition für $(k-1)^2 \leqq z < k^2$:

$$f_1(z)=1,$$

$$\frac{f_2(z)}{f_1(z)}=\frac{2^2}{z}>\frac{2^2}{k^2},$$

$$\frac{f_3(z)}{f_2(z)}=\frac{3^2}{z}>\frac{3^2}{k^2},$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{f_{k-1}(z)}{f_{k-2}(z)}=\frac{(k-1)^2}{z}>\frac{(k-1)^2}{k^2},$$

woraus durch Multiplikation folgt:

$$f_{k-1}(z) > \frac{(k-1)!^3}{k^{2k-4}} = \frac{k!^3}{k^{2k-1}}.$$

Also a fortiori und unter Benutzung der *Stirling*schen Formel:

$$\varphi(z) > \frac{k!^3}{k^{2k-1}} > \frac{(\sqrt{2\pi}\, e^{-k} k^{k+\frac{1}{2}})^3}{k^{2k-1}} > \left(\frac{k}{e^3}\right)^k.$$

Da aber mit z zugleich auch k ins Unendliche wächst, so folgt, wie behauptet, $\lim\limits_{z=\infty} \varphi(z) = \infty$. Damit ist nun der Satz von *Kronecker* vollständig widerlegt.

Auf ganz anderer Grundlage beruht ein zweites Beweisfahren von *Kronecker*, das sich auf die allgemeinsten *Dirichlet*schen Reihen bezieht, und bei dem auch komplexe Argumentwerte eine wesentliche Rolle spielen*). Bekanntlich lassen sich die Koeffizienten einer Potenzreihe

$$\mathfrak{P}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

durch die Formel

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{\mathfrak{P}(z)}{z^{n+1}}\, dz$$

ausdrücken, wo der Integrationsweg eine den Nullpunkt in positivem Sinn umlaufende geschlossene Linie ist. Daraus folgt sogleich, daß die Funktion $\mathfrak{P}(z)$ sich nur auf eine Weise in eine Potenzreihe entwickeln läßt, da ja die Koeffizienten durch obige Formel *eindeutig* bestimmt sind. In ähnlicher Weise suchte *Kronecker* die Exponenten λ_n und die Koeffizienten c_n einer *Dirichlet*schen Reihe aus der darzustellenden Funktion mit Hilfe eines komplexen Integrals eindeutig zu bestimmen. Dabei handelt es sich um das Integral

$$\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} f(z) \frac{e^{wz}}{z}\, dz,$$

welches als Funktion der reellen Variabeln w aufgefaßt wird. Das gleiche

*) Notiz über Potenzreihen, Monatsberichte der Berliner Akademie 1878, S. 53—58.

Integral betrachtet auch Herr *Cahen* in der eingangs genannten Arbeit. Aber beide Autoren bestimmen seinen Wert lediglich dadurch, daß sie für $f(z)$ die *Dirichlet*sche Reihe einsetzen und dann *gliedweise* integrieren. Ich werde in § 4 und 5 den nicht leichten Nachweis führen, daß dies Verfahren in der Tat zum richtigen Resultat führt. Da aber sowohl bei *Kronecker* wie bei Herrn *Cahen* eine derartige Begründung fehlt, können ihre Untersuchungen natürlich nicht als Beweis des Eindeutigkeitssatzes gelten.

§ 3.

Indem wir jetzt zum exakten Beweis des fraglichen Satzes übergehen, setzen wir, was selbstverständlich ohne Beschränkung der Allgemeinheit gestattet ist, den ersten Koeffizienten c_1 von Null verschieden voraus. Transformieren wir dann die *Dirichlet*sche Reihe in die absolut konvergente Reihe (4.) und schreiben den ersten Term separat, so kommt für $\Re(z) > \Re(\zeta)$:

$$f(z) = C_1 (e^{-\lambda_1 (z-\zeta)} - e^{-\lambda_2 (z-\zeta)}) + \sum_{n=2}^{\infty} C'_n (e^{-\lambda_n (z-\zeta)} - e^{-\lambda_{n+1} (z-\zeta)}).$$

Hierbei ist nun auch $C_1 = c_1 e^{-\lambda_1 \zeta}$ von Null verschieden, und außerdem nach (3.): $|C'_n| < C$. Mittels der Abschätzungsformel (5.) erhält man daher, wenn zur Abkürzung

$$z - \zeta = x + iy$$

gesetzt wird $(x, y$ reell; $x > 0)$:

$$\begin{aligned} |f(z)| &\geq |C_1 e^{-\lambda_1 (z-\zeta)}| - |C_1 e^{-\lambda_2 (z-\zeta)}| - \sum_{n=2}^{\infty} |C'_n| \cdot |e^{-\lambda_n (z-\zeta)} - e^{-\lambda_{n+1} (z-\zeta)}| \\ &\geq |C_1| e^{-\lambda_1 x} - C e^{-\lambda_2 x} - C \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x} (e^{-\lambda_n x} - e^{-\lambda_{n+1} x}) \\ &= |C_1| e^{-\lambda_1 x} - C e^{-\lambda_2 x} - C \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x} e^{-\lambda_2 x} \\ &\geq |C_1| e^{-\lambda_1 x} - 2C \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x} e^{-\lambda_2 x}. \end{aligned}$$

Daher ist gewiß $|f(z)| > 0$, sobald die Ungleichung

$$|C_1|\, e^{-\lambda_1 x} > 2C\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}\, e^{-\lambda_2 x}$$

besteht. Löst man diese nach y auf, so kommt

$$y^2 < x^2\left\{\frac{|C_1|^2}{4C^2}\, e^{2(\lambda_2-\lambda_1)x} - 1\right\}.$$

Um die Bedeutung dieses Resultats zu übersehen, wählen wir in der komplexen Zahlebene den Punkt ζ als Anfangspunkt eines rechtwinkligen Koordinatensystems, dessen X- und Y-Achse bzw. der reellen und imaginären Achse parallel sind. Die Kurve mit der Gleichung

$$y^2 = x^2\left\{\frac{|C_1|^2}{4C^2}\, e^{2(\lambda_2-\lambda_1)x} - 1\right\}$$

hat die in nebenstehender Figur angedeutete Gestalt. Wegen des in der Gleichung auftretenden Exponentialfaktors erstreckt sie sich offenbar nach oben und unten sehr steil ins Unendliche. Der unendliche Teil der Ebene, welcher rechts von der Kurve liegt, ist charakterisiert durch die Ungleichung

$$y^2 < x^2\left\{\frac{|C_1|^2}{4C^2}\, e^{2(\lambda_2-\lambda_1)x} - 1\right\};$$

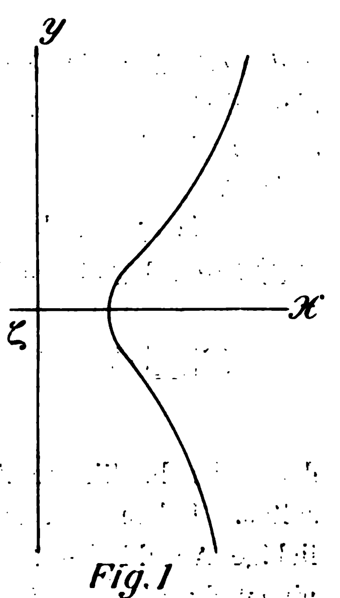


Fig. 1

in ihm ist also überall $|f(z)| > 0$. Damit ist nun nicht nur der in § 2 angekündigte Satz bewiesen, daß $f(z)$ nicht für alle Werte von z, deren reeller Teil eine gewisse Zahl übersteigt, verschwinden kann; sondern wir finden sogar, daß in dem ganzen unendlichen Gebiet, welches rechts von der obigen Kurve liegt, überhaupt keine einzige Nullstelle von $f(z)$ vorhanden ist.

Unsere Kurve hat nun aber den Nachteil, daß sie nicht für alle *Dirichlet*schen Reihen die gleiche ist. Denn in ihrer Gleichung treten die Konstanten C, C_1 und vor allem auch λ_1, λ_2 auf, welche von der speziellen *Dirichlet*schen Reihe abhängen, die wir gerade betrachten. Durch eine zweckmäßige Modifikation des Beweisganges werden wir aber zu einer unendlichen Serie von Kurven gelangen, die wesentlich dasselbe leisten, die

aber für alle *Dirichlet*schen Reihen die gleichen bleiben und die außerdem den Vorzug haben, noch sehr viel steiler ins Unendliche zu führen als die bereits gefundene Kurve; das Gebiet, welches sicher von Nullstellen frei ist, wird also dadurch im Vergleich zu früher noch erheblich erweitert. Es gilt nämlich folgendes

Theorem: Wenn eine Funktion $f(z)$ für $\Re(z) \geqq \Re(\zeta)$ in eine Dirichletsche Reihe entwickelt werden kann, so hat $f(z)$ in dem ganzen unendlichen Gebiet, welches rechts von der Kurve

$$y = \pm e^{Mx}$$

und zugleich rechts von der Geraden $x=1$ liegt, wie groß auch die positive Zahl M gewählt wird, allemal nur eine endliche Anzahl von Nullstellen; dabei ist der Punkt ζ als Anfangspunkt des xy-Koordinatensystems gedacht.

Die Quelle des Beweises liegt wieder genau wie früher in der für $\Re(z) > \Re(\zeta)$ gültigen Ungleichung (vgl. S. 104 unten):

$$|f(z)| \geqq |C_1 e^{-\lambda_1(z-\zeta)}| - C_1 e^{-\lambda_2(z-\zeta)}| - \sum_{n=2}^{\infty} |C_n| \cdot |e^{-\lambda_n(z-\zeta)} - e^{-\lambda_{n+1}(z-\zeta)}|,$$

deren einzelne Terme aber jetzt in etwas anderer Weise abgeschätzt werden sollen. Indem man zunächst von der unendlichen Summe rechts eine beliebige Anzahl $N-1$ von Termen abspaltet und wieder $z-\zeta = x+iy$ setzt, nimmt die Formel die Gestalt an:

$$(6.)\quad \begin{aligned} |f(z)| \geqq |C_1|\, e^{-\lambda_1 x}| - Ce^{-\lambda_2 x} - \sum_{n=2}^{N} |C_n| \cdot |e^{-\lambda_n(x+iy)} - e^{-\lambda_{n+1}(x+iy)}| \\ - \sum_{n=N+1}^{\infty} |C_n| \cdot |e^{-\lambda_n(x+iy)} - e^{-\lambda_{n+1}(x+iy)}|. \end{aligned}$$

Hier wenden wir nun auf die Glieder der *unendlichen* Summe wieder die Abschätzungsformel (5.) an, wodurch wir analog wie oben erhalten:

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} |C_n| \cdot |e^{-\lambda_n(x+iy)} - e^{-\lambda_{n+1}(x+iy)}| \leqq C \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x} e^{-\lambda_{N+1} x}.$$

Die *endliche* Summe in (6.) dagegen schätzen wir in folgender Weise ab:

$$\sum_{n=2}^{N} |C_n| \cdot |e^{-\lambda_n(x+iy)} - e^{-\lambda_{n+1}(x+iy)}| \leqq \sum_{n=2}^{N} C(e^{-\lambda_n x} + e^{-\lambda_{n+1} x})$$

$$\leqq \sum_{n=2}^{N} C \cdot 2 e^{-\lambda_2 x} = 2C(N-1)e^{-\lambda_2 x}.$$

Führt man in Ungleichung (6.) für die beiden Summen die soeben berechneten größeren (oder wenigstens nicht kleineren) Werte ein, so wird die Ungleichung verstärkt, und man erhält

$$|f(z)| \geqq |C_1| e^{-\lambda_1 x} - (2N-1) C e^{-\lambda_2 x} - C \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x} e^{-\lambda_{N+1} x}.$$

Daher ist gewiß $f(z)$ von Null verschieden, sobald nur

$$|C_1| e^{-\lambda_1 x} > (2N-1) C e^{-\lambda_2 x} + C \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x} e^{-\lambda_{N+1} x}$$

oder

$$(7.)\qquad |C_1| > (2N-1) C e^{-(\lambda_2-\lambda_1)x} + C \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x} e^{-(\lambda_{N+1}-\lambda_1)x}$$

ist. Nun sei M eine beliebige positive Zahl. Wegen $\lim\limits_{n=\infty} \lambda_n = \infty$ wird man N so groß wählen können, daß

$$(8.)\qquad \lambda_{N+1} - \lambda_1 M > +1$$

wird. Da x positiv ist, wird dann Ungleichung (7.) sicher erfüllt sein, wenn sogar

$$(9.)\qquad |C_1| > (2N-1) C e^{-(\lambda_2-\lambda_1)x} + C \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x} e^{-(M+1)x}$$

gefordert wird. Um diese Ungleichung zu erfüllen, beschränken wir die Zahl x, welche bisher jede positive Zahl bedeuten konnte, auf solche Werte, für die

$$(2N-1)\,C e^{-(\lambda_2-\lambda_1)x} \leqq \frac{1}{2}|C_1|$$

ausfällt, oder was dasselbe ist:

$$x \geqq \frac{1}{\lambda_2-\lambda_1} \log \frac{(2N-1)\,C}{\frac{1}{2}|C_1|}. \tag{10.}$$

Dann ist Ungleichung (9.) a fortiori erfüllt, wenn die folgende besteht:

$$\frac{1}{2}|C_1| > C\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}\,e^{-(M+1)x};$$

oder auch durch Auflösung nach y;

$$y^2 < x^2\left\{\frac{|C_1|^2}{4C^2}\,e^{2(M+1)x}-1\right\}. \tag{11.}$$

Wir beschränken nun weiter, falls dies durch die Ungleichung (10.) nicht schon von selbst bewirkt ist, die Zahl x auf solche Werte, daß

$$1 \leqq \frac{1}{2}\,\frac{|C_1|^2}{4C^2}\,e^{2(M+1)x} \quad ; x \geqq 1$$

wird; oder was das gleiche sagt:

$$x \geqq \frac{1}{2(M+1)} \log \frac{8C^2}{|C_1|^2} \quad ; x \geqq 1. \tag{12.}$$

Das Bestehen der Ungleichung (11.) wird dann a fortiori garantiert, wenn sogar die folgende stärkere Ungleichung erfüllt ist:

$$y^2 < \frac{1}{2}\,\frac{|C_1|^2}{4C^2}\,e^{2(M+1)x} = \frac{|C_1|^2}{8C^2}\,e^{2x}e^{2Mx}. \tag{13.}$$

Diese ihrerseits ist befriedigt, wenn wir

$$\frac{|C_1|^2}{8C^2}\,e^{2x} \geqq 1,$$

das heißt:

$$(14.) \qquad x \geqq \frac{1}{2} \log \frac{8C^2}{|C_1|^2}$$

wählen und außerdem

$$y^2 < e^{2Mx}$$

fordern. Diese letzte Ungleichung ist aber gleichbedeutend mit

$$(15.) \qquad |y| < e^{Mx}.$$

Fassen wir zusammen, so ergibt sich das Resultat:

Die Funktion $f(z)$ ist sicher von Null verschieden, wenn, $z - \zeta = x + iy$ gesetzt, die Ungleichung

$$|y| < e^{Mx}$$

besteht, und zugleich x mindestens gleich der größeren der zwei Zahlen

$$(16.) \qquad \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \log \frac{(2N-1)C}{\frac{1}{2}|C_1|} \quad , \quad \frac{1}{2} \log \frac{8C^2}{|C_1|^2}$$

ist*). Die in diesen Bedingungen auftretende Zahl N ist durch Ungleichung (8.) bestimmt, wächst also mit M. Die untere zulässige Grenze für x wird daher ebenfalls mit M wachsen.

Um uns nun auch wieder ein geometrisches Bild zu machen, konstruieren wir unter Zugrundelegung unseres alten Koordinatensystems mit dem Anfangspunkt in ζ die Kurve

$$y = \pm e^{Mx},$$

welche uns für positive x interessiert. Sie besteht aus den beiden Ästen

*) Die Ungleichungen (12.) brauchen nicht mehr berücksichtigt zu werden, da sie durch (14.) bereits überholt sind.

ABC und DEF (Fig. 2), welche für große M außerordentlich steil auf- bzw. absteigen und daher in der Figur längs der Y-Richtung nur sehr verkürzt dargestellt werden können. Auf der X-Achse tragen wir vom Anfangspunkt ζ aus eine Strecke ab, deren Längenmaßzahl gleich der größeren der zwei Zahlen (16.) ist, und ziehen durch den Endpunkt P eine Parallele zur Y-Achse. Diese schneidet die beiden Kurvenäste in B und E. Unser Satz besagt dann, daß in dem unendlichen Flächenstück, welches links durch den Kurvenzug $CBEF$ begrenzt wird, keine Nullstelle von $f(z)$ sich findet. Dabei ist zu beachten, daß die Gerade BE um so weiter nach rechts fallen wird, je größer die Zahl M gewählt wird, je steiler also die Kurvenäste verlaufen.

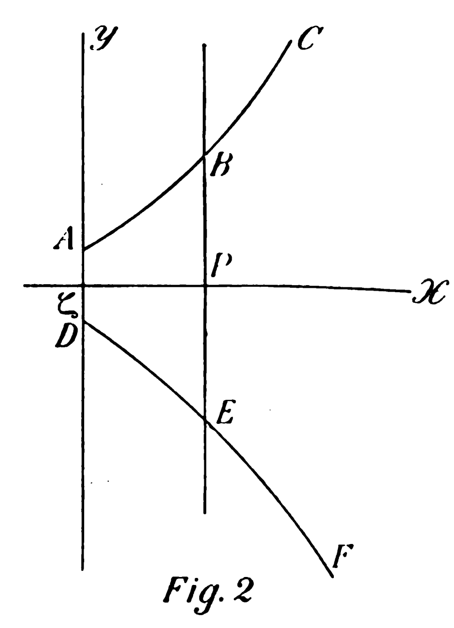


Fig. 2

In dem Theorem, wie wir es S. 106 aussprachen, ist nun von der Geraden BE überhaupt nicht die Rede, sondern das dort gedachte unendliche Flächenstück ist links begrenzt durch die beiden Kurvenäste und die Gerade $x = 1$. Diese Fläche entsteht aber aus der vorigen durch Hinzufügen eines Flächenstückes von *endlichen* Dimensionen, das zudem ganz im Innern der Konvergenzhalbebene liegt. Da eine *Dirichlet*sche Reihe in einem solchen Flächenstück aber überall regulär ist, hat sie daselbst auch nur eine endliche Anzahl von Nullstellen, womit das Theorem vollständig bewiesen ist*).

*) Statt der Geraden $x = 1$ könnte offenbar ebensogut $x = \varepsilon$ gewählt werden, wo ε eine beliebig kleine positive Zahl bedeutet. Im allgemeinen wird sogar die Gerade $x = 0$ zulässig sein; nur wenn die Konvergenzgerade genau durch den Punkt ζ geht (zumeist wird sie ihn ja rechts lassen), kann unter Umständen auf der Strecke AD (Fig. 2) ein singulärer Punkt der Funktion liegen und dieser vielleicht ein Häufungspunkt von Nullstellen sein. Jedoch ist es ohne Interesse, in dieser Richtung das Theorem möglichst umfassend zu formulieren; wesentlich ist vielmehr nur, *daß das besagte unendliche Gebiet genügend weit rechts überhaupt keine Nullstellen mehr aufweist.* Insofern wäre es auch ganz gleichgiltig, wenn statt des Punktes ζ irgendein andrer Punkt ζ' als Anfangspunkt der xy-Koordinaten gewählt würde. Denn wenn auch ζ' weiter links liegen sollte wie ζ, so bleibt eine in bezug auf ζ' konstruierte Kurve $y = \pm e^{M'x}$ von einer gewissen Stelle ab schließlich doch viel weiter rechts, als die Kurve $y = \pm e^{Mx}$ in bezug auf ζ, wenn nur $M > M'$ gewählt wird.

Wir können unser Theorem nun leicht noch dahin erweitern, daß die Funktion $f(z)$ in dem besagten Gebiet jeden beliebigen Wert, wenn überhaupt, doch nur eine endliche Anzahl von Malen annehmen kann. Denn sei α irgend ein Wert; dann kann die Funktion $f(z) - \alpha$ wieder als *Dirichlet*sche Reihe dargestellt werden, indem der Summand $-\alpha = -\alpha e^{-0z}$ an geeigneter Stelle in die unendliche Reihe $\Sigma c_n e^{-\lambda_n z}$ eingeschoben wird. Daher hat die Funktion $f(z) - \alpha$ in dem mehrfach genannten Gebiet nur eine endliche Anzahl von Nullstellen, das heißt aber, die Funktion $f(z)$ nimmt den Wert α nur eine endliche Anzahl von Malen an. Wir erhalten also das folgende weitere

Theorem: Eine notwendige Bedingung dafür, daß eine Funktion $f(z)$ für $\Re(z) \geqq \Re(\zeta)$ in eine Dirichletsche Reihe entwickelt werden kann, besteht darin, daß die Funktion in dem ganzen unendlichen Gebiet, welches rechts von der Kurve

$$y = \pm e^{Mx}$$

und zugleich rechts von der Geraden $x = 1$ liegt, jeden Wert nur eine endliche Anzahl von Malen annimmt. Dabei ist wieder der Punkt ζ als Anfangspunkt des xy-Koordinatensystems gedacht und M darf jede beliebige positive Zahl bedeuten.

Auch hier gilt wieder das in der Fußnote S. 110 Gesagte.

Wenn die Bedingung des Theorems auch weit davon entfernt ist, hinreichend zu sein, so ist sie doch recht nützlich und gestattet in vielen Fällen ohne weiteres zu erkennen, daß eine gegebene Funktion nicht in eine *Dirichlet*sche Reihe entwickelt werden kann. Dies gilt hiernach z. B. für die Funktionen $\sin z$, $\cos z$ und viele andere.

Noch viel weiter, und sogar mit einfacheren Mitteln, gelangt man bei solchen *Dirichlet*schen Reihen, welche ein Gebiet absoluter Konvergenz haben. Denn obwohl ja die Kurven $y = e^{Mx}$ sehr steil aufsteigen, gelangen sie doch schließlich beliebig weit nach rechts, und unsere Untersuchungen lassen es also sehr wohl zu, daß eine *Dirichlet*sche Reihe auch Nullstellen (oder α-Stellen) mit beliebig großem reellen Teil hat: wir wissen nur, daß dann auch der imaginäre Teil sehr groß sein muß. Bei *Dirichlet*schen Reihen mit absoluter Konvergenzhalbebene dagegen können wir beweisen, daß rechts von einer gewissen Parallelen zur imaginären Achse überhaupt

keine Nullstellen mehr liegen; es gibt also dann keine Nullstellen mit beliebig großem reellen Teil.

Es sei nämlich ζ ein Punkt absoluter Konvergenz. Dann ist auch die Reihe

$$f(\zeta)e^{\lambda_1\zeta} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-(\lambda_n-\lambda_1)\zeta}$$

absolut konvergent. Man kann daher eine Zahl N so bestimmen, daß

$$(17.)\qquad \sum_{n=N+1}^{\infty} |c_n e^{-(\lambda_n-\lambda_1)\zeta}| < \frac{1}{2}|c_1|$$

wird, da wir natürlich wieder $c_1 \neq 0$ annehmen dürfen. Für $\Re(z) > \Re(\zeta)$ ist dann a fortiori

$$(18.)\qquad \sum_{n=N+1}^{\infty} |c_n e^{-(\lambda_n-\lambda_1)z}| < \frac{1}{2}|c_1|,$$

weil ja die Glieder dieser neuen Reihe kleiner als die entsprechenden Glieder in (17.) sind. Ferner ist für $\Re(z) > \Re(\zeta)$ auch:

$$\begin{aligned} |f(z)e^{\lambda_1 z}| &= \left|c_1 + \sum_{n=2}^{\infty} c_n e^{-(\lambda_n-\lambda_1)z}\right| \\ &\geqq |c_1| - \sum_{n=2}^{\infty} |c_n e^{-(\lambda_n-\lambda_1)z}| \\ &> |c_1| - \sum_{n=2}^{N} |c_n e^{-(\lambda_n-\lambda_1)z}| - \frac{1}{2}|c_1| \end{aligned}$$

(infolge von (18.)).

Ist außerdem noch $\Re(z) > 0$, so folgt:

$$\sum_{n=2}^{N} |c_n e^{-(\lambda_n-\lambda_1)z}| = \sum_{n=2}^{N} |c_n| e^{-(\lambda_n-\lambda_1)\Re(z)} < e^{-(\lambda_2-\lambda_1)\Re(z)} \sum_{n=2}^{N} |c_n|,$$

so daß wir aus der letzten Ungleichung noch erhalten:

$$|f(z)e^{\lambda_1 z}| > \frac{1}{2}|c_1| - e^{-(\lambda_2-\lambda_1)\Re(z)} \sum_{n=2}^{N} |c_n|.$$

Daher ist gewiß $f(z)$ von Null verschieden, sobald

$$\frac{1}{2}|c_1| > e^{-(\lambda_2-\lambda_1)\Re(z)} \sum_{n=2}^{N} |c_n|$$

wird; oder durch Auflösung nach $\Re(z)$:

$$\Re(z) > \frac{1}{\lambda_2-\lambda_1} \log \frac{\sum\limits_{n=2}^{N} |c_n|}{\frac{1}{2}|c_1|}.$$

Die Funktion $f(z)$ hat also gewiß keine Nullstelle mehr, sobald $\Re(z)$ eine gewisse Größe übersteigt. Ganz das Gleiche läßt sich nun aber, genau wie auf S. 111 oben auch auf beliebige α-Stellen übertragen, so daß wir schließlich zu folgendem Satz gelangen:

Theorem: Wenn eine Funktion $f(z)$ für $\Re(z) \geqq \Re(\zeta)$ in eine absolut konvergente Dirichletsche Reihe entwickelbar ist, so gibt es zu jedem Wert α eine Parallele zur imaginären Achse, rechts von welcher die Funktion den Wert α nicht mehr annimmt.

Ich bemerke zum Schluß, daß die Resultate dieses Paragraphen sich nicht etwa dahin erweitern lassen, daß eine *Dirichlet*sche Reihe in ihrem *ganzen* Konvergenzgebiet jeden Wert nur eine endliche Anzahl von Malen annimmt. Einer solchen Vermutung widersprechen nämlich schon die *endlichen Dirichlet*schen Reihen, die natürlich in der ganzen Ebene konvergieren; außerdem unter den unendlichen jedenfalls die bekannte Reihe

$$(1-2^{1-z})\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^z},$$

welche für $\Re(z) > 0$ konvergiert. Diese hat in ihrem Konvergenzgebiet unendlich viele Nullstellen, nämlich einmal die imaginären Nullstellen der *Riemann*schen Zetafunktion, dann aber auch die imaginären Nullstellen des Faktors $1-2^{1-z}$, das sind die Punkte

$$z = 1 \pm \frac{2n\pi i}{\log 2}. \qquad (n=1,2,3,\ldots)$$

§ 4.

Herr *Cahen* gibt in § 11 seiner eingangs zitierten Arbeit eine angeblich notwendige und hinreichende Bedingung dafür an, daß eine Funktion in eine *Dirichlet*sche Reihe entwickelt werden kann. Ich werde jetzt und im folgenden Paragraphen zeigen, daß diese Bedingung in der Tat notwendig, aber keineswegs hinreichend ist. Es handelt sich dabei vor allem um den Nachweis der Formel

$$\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\lambda_n z}\right)\frac{e^{wz}}{z}\,dz=\sum_{n=1}^{\infty} c_n \int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{e^{(w-\lambda_n)z}}{z}\,dz.$$

Wie bereits in § 2 erwähnt, hat Herr *Cahen* diese gliedweise Integration der unendlichen Reihe nicht genügend motiviert. Er beruft sich nämlich lediglich auf die gleichmäßige Konvergenz und übersieht dabei, daß solches nur für Integrationswege von *endlicher* Länge statthaft ist. *Kronecker**) vollends nimmt für die gliedweise Integration ein Kriterium in Anspruch, welches nicht einmal für endliche, geschweige denn für unendliche Integrationswege richtig ist.

Herr *von Mangoldt***) hat die obige Integralformel für die spezielle *Dirichlet*sche Reihe

$$-\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{L(n)}{n^z},$$

wo $L(p^m)=\log p$, $L(pqa)=0$ ist (p, q ungleiche Primzahlen), richtig bewiesen, und seine Methode läßt sich ohne Schwierigkeit auf alle *absolut* konvergenten *Dirichlet*schen Reihen ausdehnen. Neue Wege aber erfordert der Beweis, wenn man die allgemeinsten *Dirichlet*schen Reihen ins Auge faßt. Ich behandle dabei gleich ein etwas allgemeineres Integral und schicke zunächst folgenden Hilfssatz voraus:

*Hilfssatz: Bedeuten h_1, h_2, λ positive Zahlen, a eine reelle, γ eine komplexe Zahl, deren imaginärer Teil zwischen $-ih_1$ und $+ih_2$ liegt,***) so gilt die Formel:*

*) Siehe die auf Seite 103 zitierte Arbeit.

**) „Zu *Riemanns* Abhandlung über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Größe." Dieses Journal Bd. 114. Speziell Seite 274 ff.

***) sodaß die Zahlen $h_1 \pm \Re(i\gamma)$, $h_2 \pm \Re(i\gamma)$ positiv sind.

$$\int_{a-ih_1}^{a+ih_2} \frac{e^{-\lambda z}}{z-\gamma}\,dz = \int_{a-ih_1}^{\infty-ih_1} \frac{e^{-\lambda z}}{z-\gamma}\,dz - \int_{a+ih_2}^{\infty+ih_2} \frac{e^{-\lambda z}}{z-\gamma}\,dz - 2\pi i\varphi(\lambda\gamma),$$

wobei die Integrationswege geradlinig zwischen den angegebenen Grenzen verlaufen und $\varphi(\lambda\gamma)$ die folgende Bedeutung hat:

$$\varphi(\lambda\gamma) = \begin{cases} 0 & \text{für } \Re(\gamma) < a, \\ e^{-\lambda\gamma} & \text{für } \Re(\gamma) > a. \end{cases}$$

Beweis: Durch Integration über die Begrenzung des bekannten Rechtecks mit den Ecken

$$a - ih_1,\ b - ih_1,\ b + ih_2,\ a + ih_2,$$

wo $b > a$ und auch $b > \Re(\gamma)$ ist, erhält man

$$(19.)\qquad \int_{a-ih_1}^{a+ih_2} \frac{e^{-\lambda z}}{z-\gamma}\,dz = \int_{a-ih_1}^{b-ih_1} + \int_{b-ih_1}^{b+ih_2} - \int_{a+ih_2}^{b+ih_2} - 2\pi i\varphi(\lambda\gamma),$$

wo $\varphi(\lambda\gamma)$ die angegebene Bedeutung hat, da ja das Rechteck für $\Re(\gamma) < a$ den Punkt γ ausschließt, für $\Re(\gamma) > a$ aber einschließt. Das zweite Integral auf der rechten Seite von (19.) nähert sich mit unbegrenzt wachsendem b der Null, da ja

$$\left|\int_{b-ih_1}^{b+ih_2} \frac{e^{-\lambda z}}{z-\gamma}\,dz\right| = \left|\int_{-h_1}^{h_2} \frac{e^{-\lambda(b+ix)}}{b+ix-\gamma}\,dx\right| \leq \int_{-h_1}^{h_2} \left|\frac{e^{-\lambda(b+ix)}}{b+ix-\gamma}\right| dx$$

$$< \int_{-h_1}^{h_2} \frac{e^{-\lambda b}}{b-\Re(\gamma)}\,dx = (h_1+h_2)\frac{e^{-\lambda b}}{b-\Re(\gamma)}$$

ist. Das erste und dritte Integral in (19.) nähern sich ebenfalls bestimmten Grenzwerten, nämlich den Integralen

$$\int_{a-ih_1}^{\infty-ih_1} \frac{e^{-\lambda z}}{z-\gamma}\,dz, \text{ bzw. } \int_{a+ih_2}^{\infty+ih_2} \frac{e^{-\lambda z}}{z-\gamma}\,dz,$$

da diese ja offenbar (absolut) konvergieren, woraus sogleich die Behauptung des Hilfssatzes folgt.

Man beachte, daß die Voraussetzungen des Hilfssatzes erfüllt bleiben, wenn γ sich nicht ändert, aber h_1 und h_2 beliebig vergrößert werden. Die auftretenden Integrale lassen sich noch in folgender Weise abschätzen:

$$(20.)\quad \begin{aligned} \left|\int_{a-ih_1}^{\infty-ih_1} \frac{e^{-\lambda z}}{z-\gamma}\,dz\right| &= \left|\int_a^{\infty} \frac{e^{-\lambda(x-ih_1)}}{x-ih_1-\gamma}\,dx\right| \leqq \int_a^{\infty} \left|\frac{e^{-\lambda(x-ih_1)}}{x-ih_1-\gamma}\right| dx \\ &< \int_a^{\infty} \frac{e^{-\lambda x}}{h_1-\Re(i\gamma)}\,dx = \frac{1}{h_1-\Re(i\gamma)}\,\frac{e^{-\lambda a}}{\lambda}; \end{aligned}$$

ebenso auch

$$(21.)\quad \left|\int_{a+ih_2}^{\infty+ih_2} \frac{e^{-\lambda z}}{z-\gamma}\,dz\right| < \frac{1}{h_2+\Re(i\gamma)}\,\frac{e^{-\lambda a}}{\lambda}.$$

Läßt man daher in dem Hilfssatz h_1 und h_2 irgendwie ins Unendliche wachsen, so konvergieren die Integrale rechter Hand gegen Null und man erhält die bekannte Formel

$$(22.)\quad \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{e^{-\lambda z}}{z-\gamma}\,dz = \lim_{h_1,h_2=\infty} \int_{a-ih_1}^{a+ih_2} \frac{e^{-\lambda z}}{z-\gamma}\,dz = \begin{cases} 0 & \text{für } \Re(\gamma) < a, \\ -2\pi i e^{-\lambda\gamma} & \text{für } \Re(\gamma) > a, \end{cases}$$

wobei die Voraussetzung $\lambda > 0$ besonders zu beachten ist.

Von jetzt ab verstehen wir in diesem Paragraphen unter

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\lambda_n z}$$

eine solche *Dirichlet*sche Reihe, deren sämtliche Exponenten λ_n positiv sind, also schon $\lambda_1 > 0$. Bedeutet dann a eine reelle Zahl im Innern der Konvergenzhalbebene, so betrachten wir das Integral

$$J(\gamma) = \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{f(z)}{z-\gamma}\,dz.$$

Setzt man hier für $f(z)$ die obige Reihe ein, so erhält man für das Integral unter der vorläufig unbewiesenen Annahme, daß gliedweise Integration gestattet ist, nach Formel (22.) den Wert

$$J(\gamma) = \begin{cases} 0 & \text{für } \Re(\gamma) < a, \\ -2\pi i f(\gamma) & \text{für } \Re(\gamma) > a. \end{cases}$$

Wir wollen jetzt nachweisen, daß das Integral in der Tat konvergiert und den angegebenen Wert hat, daß somit die gliedweise Integration wirklich erlaubt ist. Es sei ζ eine reelle Zahl, welche kleiner als a ist, aber noch im Innern der Konvergenzhalbebene liegt. Dann ist nach Formel (4.):

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \left(e^{-\lambda_n (z-\zeta)} - e^{-\lambda_{n+1}(z-\zeta)}\right),$$

also

$$\int_{a-ih_1}^{a+ih_2} \frac{f(z)}{z-\gamma}\, dz = \int_{a-ih_1}^{a+ih_2} \sum_{n=1}^{\infty} C_n \left(e^{-\lambda_n (z-\zeta)} - e^{-\lambda_{n+1}(z-\zeta)}\right) \frac{dz}{z-\gamma}.$$

Da diese Reihe, wie in § 1 ausdrücklich bemerkt wurde, längs des Integrationsweges gleichmäßig konvergiert, da außerdem der Faktor $\frac{1}{z-\gamma}$ auf dem ganzen Integrationsweg offenbar absolut unter einer endlichen Schranke bleibt, also die Gleichmäßigkeit nicht beeinflussen kann, so darf man gliedweise integrieren und erhält:

$$\int_{a-ih_1}^{a+ih_2} \frac{f(z)}{z-\gamma}\, dz = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \int_{a-ih_1}^{a+ih_2} \left(e^{-\lambda_n (z-\zeta)} - e^{-\lambda_{n+1}(z-\zeta)}\right) \frac{dz}{z-\gamma}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} C_n \left\{ e^{\lambda_n \zeta} \int_{a-ih_1}^{a+ih_2} \frac{e^{-\lambda_n z}}{z-\gamma}\, dz - e^{\lambda_{n+1} \zeta} \int_{a-ih_1}^{a+ih_2} \frac{e^{-\lambda_{n+1} z}}{z-\gamma}\, dz \right\}.$$

Indem man nun auf die Integrale der rechten Seite unsern Hilfssatz anwendet, was für genügend große h_1, h_2 erlaubt ist, findet man:

$$\int_{a-ih_1}^{a+ih_2} \frac{f(z)}{z-\gamma}\, dz = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \left\{ e^{\lambda_n \zeta} \left(\int_{a-ih_1}^{\infty-ih_1} \frac{e^{-\lambda_n z}}{z-\gamma}\, dz - \int_{a+ih_2}^{\infty+ih_2} \frac{e^{-\lambda_n z}}{z-\gamma}\, dz - 2\pi i \varphi(\lambda_n \gamma) \right) \right.$$

$$-e^{\lambda_{n+1}\zeta}\Big(\int_{a-ih_1}^{\infty-ih_1}\frac{e^{-\lambda_{n+1}z}}{z-\gamma}\,dz-\int_{a+ih_2}^{\infty+ih_2}\frac{e^{-\lambda_{n+1}z}}{z-\gamma}\,dz-2\pi i\varphi(\lambda_{n+1}\gamma)\Big)\Big\},$$

oder, indem man die Integrale mit gleichen Wegen zusammenfaßt:

$$\int_{a-i}^{a+ih_2}\frac{f(z)}{z-\gamma}\,dz=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\Big\{\int_{a-ih_1}^{\infty-ih_1}\left(e^{-\lambda_n(z-\zeta)}-e^{-\lambda_{n+1}(z-\zeta)}\right)\frac{dz}{z-\gamma}$$

$$-\int_{a+ih_2}^{\infty+ih_2}\left(e^{-\lambda_n(z-\zeta)}-e^{-\lambda_{n+1}(z-\zeta)}\right)\frac{dz}{z-\gamma}$$

$$-2\pi i\left(e^{\lambda_n\zeta}\varphi(\lambda_n\gamma)-e^{\lambda_{n+1}\zeta}\varphi(\lambda_{n+1}\gamma)\right)\Big\}.$$

Wir wollen jetzt den Nachweis führen, daß jede der drei unendlichen Reihen

$$(23.)\qquad \Omega(-h_1)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\int_{a-ih_1}^{\infty-ih_1}\left(e^{-\lambda_n(z-\zeta)}-e^{-\lambda_{n+1}(z-\zeta)}\right)\frac{dz}{z-\gamma},$$

$$(24.)\qquad \Omega(h_2)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\int_{a+ih_2}^{\infty+ih_2}\left(e^{-\lambda_n(z-\zeta)}-e^{-\lambda_{n+1}(z-\zeta)}\right)\frac{dz}{z-\gamma},$$

$$(25.)\qquad \Phi(\gamma)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\left(e^{\lambda_n\zeta}\varphi(\lambda_n\gamma)-e^{\lambda_{n+1}\zeta}\varphi(\lambda_{n+1}\gamma)\right)$$

für sich konvergiert; alsdann wird die vorige Formel die Gestalt annehmen:

$$(26.)\qquad \int_{a-ih_1}^{a+ih_2}\frac{f(z)}{z-\gamma}\,dz=\Omega(-h_1)-\Omega(h_2)-2\pi i\,\Phi(\gamma).$$

Sehr leicht gelingt dieser Nachweis für die Reihe (25.). Gehen wir nämlich auf die in dem Hilfssatz gegebene Definition der Funktion φ zurück, so ist für $\Re(\gamma)<a$ durchweg $\varphi(\lambda_n\gamma)=0$. Daher konvergiert in diesem Fall die Reihe (25.), und zwar ist $\Phi(\gamma)=0$. Für $\Re(\gamma)>a$ ist aber $\varphi(\lambda_n\gamma)=e^{-\lambda_n\gamma}$; da wir aber $\zeta<a$ vorausgesetzt haben, so ist auch $\Re(\gamma)>\zeta$; also

$$\Phi(\gamma)=\sum_{n=1}^{\infty} C_n\left(e^{-\lambda_n(\gamma-\zeta)}-e^{-\lambda_{n+1}(\gamma-\zeta)}\right)=f(\gamma).$$

Zusammenfassend erhält man also:

$$\Phi(\gamma)=\begin{cases}0 & \text{für } \Re(\gamma)<a,\\ f(\gamma) & \text{für } \Re(\gamma)>a.\end{cases} \tag{27.}$$

Um nun auch die Konvergenz der Reihe (23.) zu beweisen, schätzen wir ihre einzelnen Glieder mit Hilfe der Formel (5.) folgendermaßen ab:

$$\left|C_n\int_{a-ih_1}^{x-ih_1}\left(e^{-\lambda_n(z-\zeta)}-e^{-\lambda_{n+1}(z-\zeta)}\right)\frac{dz}{z-\gamma}\right|$$

$$=\left|C_n\int_a^x \frac{e^{-\lambda_n(x-ih_1-\zeta)}-e^{-\lambda_{n+1}(x-ih_1-\zeta)}}{x-ih_1-\gamma}\,dx\right|$$

$$\leqq C\int_a^x \frac{\left|e^{-\lambda_n(x-ih_1-\zeta)}-e^{-\lambda_{n+1}(x-ih_1-\zeta)}\right|}{|x-ih_1-\gamma|}\,dx.$$

$$\leqq C\int_a^x \frac{|x-ih_1-\zeta|}{|x-ih_1-\gamma|}\,\frac{e^{-\lambda_n(x-\zeta)}-e^{-\lambda_{n+1}(x-\zeta)}}{x-\zeta}\,dx.$$

Was hier den ersten Quotienten unter dem Integral betrifft, so findet man

$$\frac{|x-ih_1-\zeta|}{|x-ih_1-\gamma|}=\left|1+\frac{\gamma-\zeta}{x-ih_1-\gamma}\right|\leqq 1+\frac{|\gamma-\zeta|}{|x-ih_1-\gamma|}\leqq 1+\frac{|\gamma-\zeta|}{h_1-\Re(i\gamma)}.$$

Dieser Quotient nähert sich also mit unbegrenzt wachsendem h_1 dem Grenzwert 1, und zwar gleichmäßig für alle x des Integrationsintervalles. Wenn daher h_1 hinreichend groß gewählt wird, so ist der fragliche Quotient gewiß im ganzen Integrationsintervall kleiner als 2. Ferner ist auch $\frac{1}{x-\zeta}\leqq\frac{1}{a-\zeta}$; also folgt aus der letzten Ungleichung:

$$\left| C_n \int_{a-ih_1}^{\infty-ih_1} \left(e^{-\lambda_n(z-\zeta)} - e^{-\lambda_{n+1}(z-\zeta)}\right) \frac{dz}{z-\gamma} \right|$$

$$\leqq C \int_a^\infty \frac{2}{a-\zeta} \left(e^{-\lambda_n(x-\zeta)} - e^{-\lambda_{n+1}(x-\zeta)}\right) dx = \frac{2C}{a-\zeta} \left(\frac{e^{-\lambda_n(a-\zeta)}}{\lambda_n} - \frac{e^{-\lambda_{n+1}(a-\zeta)}}{\lambda_{n+1}}\right).$$

Hier ist aber die rechte Seite das allgemeine Glied einer konvergenten Reihe, daher ist auch die Reihe (23.) absolut konvergent. Wir müssen nun aber auch noch beweisen, daß sie mit unbegrenzt wachsendem h_1 der Grenze Null zustrebt. Zu dem Ende schreiben wir sie folgendermaßen:

$$(28.)\quad \begin{aligned} \Omega(-h_1) = & \sum_{n=1}^{N} C_n \int_{a-ih_1}^{\infty-ih_1} \left(e^{-\lambda_n(z-\zeta)} - e^{-\lambda_{n+1}(z-\zeta)}\right) \frac{dz}{z-\gamma} \\ & + \sum_{n=N+1}^{\infty} C_n \int_{a-ih_1}^{\infty-ih_1} \left(e^{-\lambda_n(z-\zeta)} - e^{-\lambda_{n+1}(z-\zeta)}\right) \frac{dz}{z-\gamma}. \end{aligned}$$

Die hier auftretende unendliche Summe wird nach der soeben gefundenen Abschätzungsformel ihrer Glieder absolut höchstens gleich

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{2C}{a-\zeta} \left(\frac{e^{-\lambda_n(a-\zeta)}}{\lambda_n} - \frac{e^{-\lambda_{n+1}(a-\zeta)}}{\lambda_{n+1}}\right) = \frac{2C}{a-\zeta} \frac{e^{-\lambda_{N+1}(a-\zeta)}}{\lambda_{N+1}}.$$

Die endliche Summe in (28.) schätzen wir dagegen folgendermaßen ab:

$$\left| \sum_{n=1}^{N} C_n \int_{a-ih_1}^{\infty-ih_1} \left(e^{-\lambda_n(z-\zeta)} - e^{-\lambda_{n+1}(z-\zeta)}\right) \frac{dz}{z-\gamma} \right|$$

$$< C \sum_{n=1}^{N} \int_a^\infty \left| e^{-\lambda_n(x-ih_1-\zeta)} - e^{-\lambda_{n+1}(x-ih_1-\zeta)} \right| \frac{dx}{|x-ih_1-\gamma|}$$

$$\leqq C \sum_{n=1}^{N} \int_a^\infty \left(e^{-\lambda_n(x-\zeta)} + e^{-\lambda_{n+1}(x-\zeta)}\right) \frac{dx}{h_1 - \Re(i\gamma)}$$

$$< \frac{C}{h_1 - \Re(i\gamma)} \sum_{n=1}^{N} \int_a^\infty 2e^{-\lambda_1(x-\zeta)} dx = \frac{2CN}{h_1 - \Re(i\gamma)} \frac{e^{-\lambda_1(a-\zeta)}}{\lambda_1}.$$

Führt man diese beiden Resultate in (28.) ein, so ergibt sich

$$(29.)\qquad \Omega(-h_1) \leqq \frac{2CN}{h_1 - \Re(i\gamma)} \frac{e^{-\lambda_1(a-\zeta)}}{\lambda_1} + \frac{2C}{a-\zeta} \frac{e^{-\lambda_{N+1}(a-\zeta)}}{\lambda_{N+1}}.$$

Hieraus folgt sogleich

$$(30.)\qquad \lim_{h_1=\infty} \Omega(-h_1) = 0.$$

Denn man kann in (29.) zuerst N so groß wählen, daß der zweite Summand kleiner wird als $\frac{\varepsilon}{2}$, sodann h_1 so groß, daß auch der erste Summand kleiner wird als $\frac{\varepsilon}{2}$.

Ganz in gleicher Weise ergibt sich nun auch die Konvergenz der Reihe (24.), sowie die Beziehung:

$$(31.)\qquad \lim_{h_2=\infty} \Omega(h_2) = 0.$$

Da der Ausdruck $\Omega(-h_1)$ von h_2 nicht abhängt, ebenso $\Omega(h_2)$ nicht von h_1, so erhält man jetzt aus Formel (26.), wenn man h_1 und h_2 irgendwie ins Unendliche wachsen läßt:

$$\begin{aligned}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{f(z)}{z-\gamma}\,dz &= \lim_{h_1,h_2=\infty} \left(\Omega(-h_1) - \Omega(h_2) - 2\pi i \Phi(\gamma)\right) \\ &= \lim_{h_1=\infty} \Omega(-h_1) - \lim_{h_2=\infty} \Omega(h_2) - 2\pi i \Phi(\gamma) \\ &= -2\pi i \Phi(\gamma).\end{aligned}$$

Die Funktion $\Phi(\gamma)$ hat dabei den in (27.) angegebenen Wert, so daß wir das folgende wichtige Theorem erhalten:

Theorem. Bedeutet

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\lambda_n z}$$

eine Dirichletsche Reihe, deren Exponenten λ_n alle positiv sind, ist ferner a ein reeller Wert im Innern der Konvergenzhalbebene, so besteht die Formel

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{f(z)}{z-\gamma}\,dz=\begin{cases}0 & \text{für } \Re(\gamma)<a,\\ -f(\gamma) & \text{für } \Re(\gamma)>a.\end{cases}$$

Dies ist nun genau die Formel, welche wir auf S. 117 oben durch gliedweise Integration erhielten, womit bewiesen ist, daß die gliedweise Integration hier in der Tat erlaubt ist. Ich bemerke noch, daß γ ganz beliebig ist und nicht etwa der Konvergenzhalbebene anzugehören braucht.

§ 5.

Wählt man in dem eben bewiesenen Theorem speziell $\gamma=0$, $a>0$, so kommt:

$$(32.)\qquad \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\Big(\sum_{n=1}^{\infty}c_n e^{-\lambda_n z}\Big)\frac{dz}{z}=0 \qquad \text{für } \lambda_n>0.$$

Um uns jetzt von der Einschränkung, daß die Exponenten λ_n schon vom ersten ab positiv sind, wieder zu befreien, erinnern wir an die bekannte Formel

$$(33.)\qquad \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{e^{\lambda z}}{z}\,dz=1 \qquad \text{für } \lambda>0,\ a>0,$$

die sich übrigens leicht aus (22.) gewinnen läßt. Für $\lambda=0$ konvergiert das betreffende Integral nicht mehr, wenigstens nicht in dem Sinn, wie wir es seither aufgefaßt haben. Wenn wir aber, was von jetzt ab geschehen soll, an Stelle der allgemeinen Definition

$$(34.)\qquad \int_{a-i\infty}^{a+i\infty}=\lim_{h_1,h_2=\infty}\int_{a-ih_1}^{a+ih_2}$$

die speziellere

$$(35.)\qquad \int_{a-i\infty}^{a+i\infty}=\lim_{h=\infty}\int_{a-ih}^{a+ih}$$

treten lassen, so konvergiert das Integral (33.) auch für $\lambda=0$, und zu den bisherigen Formeln tritt noch diese hinzu:

$$(36.)\qquad \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{dz}{z}=\frac{1}{2}\qquad \text{für } a>0.$$

Sei jetzt

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n e^{-\lambda_n z}$$

eine beliebige *Dirichlet*sche Reihe, deren Exponenten λ_n natürlich wie immer der Größe nach geordnet sind. Dabei seien etwa die ersten $r-1$ Exponenten negativ, sodann $\lambda_r=0$, und endlich alle folgenden Exponenten positiv. Dann werden wir schreiben:

$$f(z)=\sum_{n=1}^{r-1}c_n e^{-\lambda_n z}+c_r+\sum_{n=r+1}^{\infty}c_n e^{-\lambda_n z}.$$

Für die Integration der drei Terme auf der rechten Seite sind der Reihe nach die Formeln (33.), (36.), (32.) in Anwendung zu bringen, wodurch man erhält:

$$(37.)\qquad \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{f(z)}{z}dz=\sum_{n=1}^{r-1}c_n+\frac{1}{2}c_r.$$

Dabei ist a ein positiver Wert im Innern der Konvergenzhalbebene. Man beachte auch, daß lediglich der Exponent $\lambda_r=0$ dazu zwingt, für das Integral die spezielle Definition (35.) zu wählen. Tritt ein Exponent 0 in der *Dirichlet*schen Reihe nicht auf, so ist ebenso gut auch die Definition (34.) zulässig.

Bedeutet w eine reelle Größe, so ist auch

$$f(z)e^{wz}=\sum_{n=1}^{\infty}c_n e^{-(\lambda_n-w)z}$$

eine *Dirichlet*sche Reihe, und wenn man auf diese die Formel (37.) anwendet, so erhält man:

$$(38.)\qquad \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{f(z)e^{wz}}{z}dz = \begin{cases}\sum\limits_{n=1}^{r-1} c_n \text{ für } \lambda_{r-1} < w < \lambda_r,\\ \sum\limits_{n=1}^{r-1} c_n + \frac{1}{2}c_r \text{ für } w = \lambda_r.\end{cases}$$

Dies ist nun die *Kronecker-Cahen*sche Formel*), die damit zum ersten Male streng bewiesen ist; für $r = 1$ fallen auf der rechten Seite die Summen natürlich weg. Ähnlich wie die Koeffizienten einer Potenz- oder *Fourier*schen Reihe aus der dargestellten Funktion mit Hilfe eines bestimmten Integrals berechnet werden können, so werden durch das obige Integral die Koeffizienten einer *Dirichlet*schen Reihe eindeutig aus der Funktion bestimmt. Aber auch die Exponenten λ_n sind durch das Integral gegeben; sie sind nämlich die Unstetigkeitsstellen des Integrals als Funktion von w. Wie Formel (38.) weiter zeigt, nimmt das Integral an besagten Unstetigkeits- oder Sprungstellen den arithmetischen Mittelwert zwischen rechts und links an.

Im Anschluß an Herrn *Cahen* können wir diese Resultate zu folgendem Theorem formulieren:

Theorem. Eine notwendige Bedingung dafür, daß die für $\Re(z) > \delta \geqq 0$ *reguläre Funktion* $f(z)$ *für* $\Re(z) > \delta$ *in eine Reihe der Form*

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\lambda_n z}$$

entwickelt werden kann, besteht darin, daß das Integral

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{f(z)e^{wz}}{z}dz$$

für $a > \delta$ *konvergiert, von* $a (> \delta)$ *unabhängig ist und, wenn* w *eine beliebige reelle Zahl bedeutet, die folgenden Eigenschaften hat:*

---

*) Ist w nicht einem Exponenten λ_r gleich, so darf das Integral wieder in dem allgemeineren Sinn (34.) verstanden werden. Bei *Kronecker* und Herrn *Cahen* ist der Fall $w = \lambda_r$ übrigens ganz außer acht gelassen.

1) *es ist konstant für* $\lambda_{r-1} < w < \lambda_r$,

2) *es ist gleich Null für* $w < \lambda_1$,

3) *es hat an den Sprungstellen* λ_r *den arithmetischen Mittelwert zwischen rechts und links.*

Herr *Cahen* hält diese Bedingung fälschlicherweise auch für hinreichend. Allein sein dahin zielender Beweis in § 11 a. a. O. ist in mehr als einer Beziehung mangelhaft, und ich werde jetzt den Nachweis führen, daß die Bedingung des Theorems in der Tat nicht ausreicht.

Zu dem Zweck untersuchen wir die spezielle *Dirichlet*sche Reihe

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\lambda_n z}, \tag{39.}$$

deren Exponenten λ_n durch die Rekursionsformeln

$$\lambda_1 = 1;\ \lambda_{2n} = \lambda_{2n-1} + \frac{e^{-\lambda_{2n-1}}}{n^2};\ \lambda_{2n+1} = 1 + \lambda_{2n} \tag{40.}$$

bestimmt sind, und deren Koeffizienten die Werte

$$c_{2n-1} = e^{\lambda_{2n-1}},\ c_{2n} = -e^{\lambda_{2n-1}} \tag{41.}$$

haben. Da wegen (40.) die Zahlen λ_n mit n unbegrenzt zunehmen, so handelt es sich wirklich um eine *Dirichlet*sche Reihe, und von dieser sollen jetzt die folgenden Eigenschaften nachgewiesen werden:

I. sie konvergiert für $\Re(z) > 1$, divergiert für $\Re(z) \leq 1$,

II. die durch sie dargestellte Funktion $F(z)$ läßt sich eindeutig über die Konvergenzgerade nach links fortsetzen mindestens bis zur Geraden $\Re(z) = 0$ und ist für $\Re(z) > 0$ überall regulär,

III. das Integral

$$\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{F(z)e^{wz}}{z}\, dz$$

hat für $a > 0$, nicht bloß für $a > 1$, alle in dem obigen Theorem angegebenen Eigenschaften.

Wäre nun die in besagtem Theorem als notwendig erkannte Bedingung wirklich auch hinreichend, so würde aus den Eigenschaften II. und III. folgen, daß die Funktion $F(z)$ sich für $\Re(z) > 0$ in eine *Dirichlet*sche Reihe entwickeln läßt. Diese kann dann einerseits nicht mit der Reihe (39.) übereinstimmen, da letztere ja nur für $\Re(z) > 1$ konvergiert, andrerseits aber auch nicht von (39.) verschieden sein, da sie im gemeinsamen Konvergenzgebiet $\Re(z) > 1$ die gleiche analytische Funktion darstellt. Unsere Annahme führt somit auf einen Widerspruch.

Es handelt sich also jetzt nur noch um den Nachweis der Eigenschaften I.–III. Nun folgt aus (40.):

$$\lambda_{2n+1} = 1 + \lambda_{2n} > 1 + \lambda_{2n-1},$$

und hieraus wegen $\lambda_1 = 1$ sogleich

$$\lambda_{2n+1} > n + 1. \tag{42.}$$

Nach der Definition (41.) ist

$$c_{2n-1} e^{-\lambda_{2n-1} z} = e^{\lambda_{2n-1}(1-z)},$$

und folglich kann für $\Re(z) \leqq 1$ die Reihe (39.) jedenfalls nicht konvergieren, da ihre Glieder dann mit wachsendem Index nicht den Grenzwert Null haben. Für $\Re(z) > 1$ aber ist mit Rücksicht auf (42.):

$$|c_{2n-1} e^{-\lambda_{2n-1} z}| = e^{-\lambda_{2n-1}(\Re(z)-1)} < e^{-n(\Re(z)-1)}$$

und weiter

$$|c_{2n} e^{-\lambda_{2n} z}| = e^{\lambda_{2n-1} - \lambda_{2n} \Re(z)} < e^{\lambda_{2n-1} - \lambda_{2n-1} \Re(z)}$$

$$= e^{-\lambda_{2n-1}(\Re(z)-1)} < e^{-n(\Re(z)-1)}.$$

Daher konvergiert die Reihe (39.) für $\Re(z) > 1$, und zwar absolut. Faßt man in ihr je zwei Glieder zusammen, so entsteht:

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (c_{2n-1} e^{-\lambda_{2n-1} z} + c_{2n} e^{-\lambda_{2n} z}),$$

oder wenn man für die Koeffizienten ihre Werte aus (41.) einsetzt:

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{\lambda_{2n-1}} (e^{-\lambda_{2n-1} z} - e^{-\lambda_{2n} z}). \tag{43.}$$

Von dieser neuen Reihe kann man nun zeigen, daß sie bereits für $\Re(z) > 0$ konvergiert. Der absolute Wert ihres allgemeinen Gliedes läßt sich nämlich für $\Re(z) > 0$ nach Formel (5.) in folgender Weise abschätzen:

$$e^{\lambda_{2n-1}} |e^{-\lambda_{2n-1} z} - e^{-\lambda_{2n} z}| \leq e^{\lambda_{2n-1}} \frac{|z|}{\Re(z)} (e^{-\lambda_{2n-1} \Re(z)} - e^{-\lambda_{2n} \Re(z)})$$

$$< \frac{|z|}{\Re(z)} e^{\lambda_{2n-1}} (1 - e^{-(\lambda_{2n} - \lambda_{2n-1}) \Re(z)})$$

$$< \frac{|z|}{\Re(z)} e^{\lambda_{2n-1}} (\lambda_{2n} - \lambda_{2n-1}) \Re(z) = |z| (\lambda_{2n} - \lambda_{2n-1}) e^{\lambda_{2n-1}}.$$

Nach (40.) ist dies aber gleich $\frac{|z|}{n^2}$. Man erhält also für den Rest der Reihe (43.), wenn $\Re(z) > 0$ ist:

$$\left| \sum_{n=N+1}^{\infty} e^{\lambda_{2n-1}} (e^{-\lambda_{2n-1} z} - e^{-\lambda_{2n} z}) \right| < |z| \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \frac{|z|}{N}. \tag{44.}$$

Die Reihe (43.) konvergiert daher für $\Re(z) > 0$, und zwar in jedem endlichen Gebiet *gleichmäßig*. Sie stellt also eine für $\Re(z) > 0$ reguläre analytische Funktion dar und liefert, da sie für $\Re(z) > 1$ mit der Reihe (39.) übereinstimmt, deren analytische Fortsetzung über die Konvergenzgerade hinaus. Hiermit sind bereits die Behauptungen I. und II. bewiesen.

Was nun das Integral

$$\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{F(z) e^{wz}}{z} dz$$

betrifft, so hat es nach (38.) jedenfalls für $a > 1$ die behaupteten Eigen-

schaften, weil ja $F(z)$ für $\Re(z) > 1$ in eine *Dirichlet*sche Reihe entwickelt werden kann. Wir brauchen demnach nur noch zu beweisen, daß auch für $0 < b \leq 1 < a$ die Gleichung

$$(45.) \qquad \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \frac{F(z)e^{wz}}{z} dz = \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{F(z)e^{wz}}{z} dz$$

statt hat. Wir betrachten zu dem Zweck das Integral

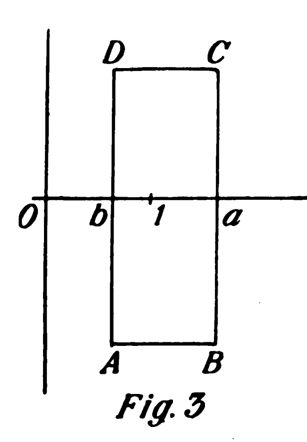


Fig. 3

$$\int \frac{F(z)\, e^{wz}}{z} dz,$$

erstreckt über die Begrenzung des Rechtecks $ABCD$ (Fig. 3). Da der Integrand in dem Rechteck und auf seiner Begrenzung regulär ist, so hat das Integral den Wert Null. Die Gleichung (45.) wird daher bewiesen sein, sobald wir zeigen können, daß die Integrale über die Wege AB und DC gegen Null konvergieren, wenn AB und DC sich nach unten bzw. oben unendlich entfernen.

Um das Integral längs AB zu untersuchen, dürfen wir für $F(z)$ die Reihe (43.) einsetzen, da diese ja für $\Re(z) > 0$ gültig ist. Es kommt dann:

$$\int_{AB} \frac{F(z)\, e^{wz}}{z} dz = \int_{AB} \sum_{n=1}^{\infty} e^{\lambda_{2n-1}} \left(e^{-\lambda_{2n-1} z} - e^{-\lambda_{2n} z}\right) \frac{e^{wz}}{z} dz$$

$$= \sum_{n=1}^{N} \int_{AB} e^{\lambda_{2n-1}} \left(e^{(w-\lambda_{2n-1})z} - e^{(w-\lambda_{2n})z}\right) \frac{dz}{z}$$

$$+ \int_{AB} \sum_{n=N+1}^{\infty} e^{\lambda_{2n-1}} \left(e^{-\lambda_{2n-1} z} - e^{-\lambda_{2n} z}\right) \frac{e^{wz}}{z} dz.$$

Das letzte dieser Integrale wird nun unter Berücksichtigung von (44.) absolut kleiner als

$$\int_{AB} \frac{|z|}{N} \left| \frac{e^{wz}}{z} dz \right| = \frac{1}{N} \int_{AB} \left| e^{wz} dz \right| < \frac{e^{|w|a}(a-b)}{N}.$$



Die endliche Summe dagegen schätzen wir folgendermaßen ab:

$$\left|\sum_{n=1}^{N} \int_{AB} e^{\lambda_{2n-1}} \left(e^{(w-\lambda_{2n-1})z} - e^{(w-\lambda_{2n})z}\right) \frac{dz}{z}\right|$$

$$< \sum_{n=1}^{N} e^{\lambda_{2N-1}} \int_{AB} \left(e^{(w-\lambda_{2n-1})\Re(z)} + e^{(w-\lambda_{2n})\Re(z)}\right) \left|\frac{dz}{z}\right|$$

$$< \sum_{n=1}^{N} e^{\lambda_{2N-1}} \int_{AB} 2 e^{(w-\lambda_1)\Re(z)} \left|\frac{dz}{z}\right|$$

$$< 2N e^{\lambda_{2N-1}} e^{|w-\lambda_1| a} \int_{AB} \left|\frac{dz}{z}\right|.$$

Bedeutet h den Abstand der Seite AB von der reellen Achse, so ist der letzte Ausdruck kleiner als

$$2N e^{\lambda_{2N-1}} e^{|w-\lambda_1| a} \frac{a-b}{h}.$$

Man erhält also zusammenfassend

$$\left|\int_{AB} \frac{F(z) e^{wz}}{z} dz\right| < 2N e^{\lambda_{2N-1}} e^{|w-\lambda_1| a} \frac{a-b}{h} + \frac{e^{|w| a}(a-b)}{N},$$

woraus folgt, daß sich das Integral mit wachsendem h der Grenze Null nähert. Denn man kann zuerst N so groß wählen, daß der zweite Summand rechts kleiner wird als $\frac{\varepsilon}{2}$; sodann h so groß, daß auch der erste Summand kleiner wird als $\frac{\varepsilon}{2}$.

Die gleiche Deduktion gilt auch für das Integral längs DC, womit dann alles bewiesen ist, was wir behauptet hatten*).

---

*) Ein weiteres Beispiel dafür, daß die Bedingungen des Theorems nicht hinreichend sind, verdanke ich einer brieflichen Mitteilung des Herrn *Landau*; es ist die Funktion

$$(1-2^{2-z})\zeta(z-1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} n}{n^z},$$

wenn man etwa $\delta = \frac{7}{8}$ nimmt. Zum Beweis muß natürlich die Theorie der *Riemann*schen Zetafunktion herangezogen werden.

Herr *Cahen* macht in § 12 a. a. O. noch die folgende Bemerkung. Wenn a und b dem Innern der Konvergenzhalbebene einer *Dirichlet*schen Reihe $f(z)$ angehören, und $0 < b < a$ ist (Fig. 4), so ist nach (38.)

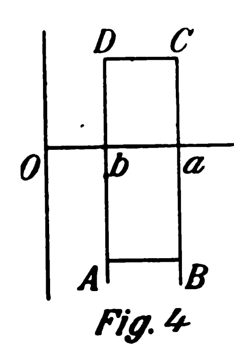


Fig. 4

$$\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{f(z)e^{wz}}{z}\,dz = \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \frac{f(z)e^{wz}}{z}\,dz.$$

Daraus folgt, daß $\int\limits_{AB} + \int\limits_{CD}$, wenn AB und CD sich unendlich entfernen, gegen Null konvergiert. Auf Grund unserer Analyse in § 4 kann man aber leicht noch mehr beweisen, daß nämlich jedes der beiden Integrale $\int\limits_{AB}$ und $\int\limits_{CD}$ für sich gegen Null konvergiert, nicht bloß ihre Summe. Doch will ich von einem ausführlichen Beweis dieser Tatsache absehen. Herr *Cahen* behauptet nun aber weiter, weil er die Bedingung des Theorems auf Seite 124 für hinreichend hält, noch folgendes (a. a. O. § 12): „Wenn sich $f(z)$ für $\Re(z) > a$ in eine *Dirichlet*sche Reihe entwickeln läßt, und wenn außerdem $\int\limits_{AB} + \int\limits_{CD}$ gegen Null konvergiert, sowie AB und CD sich unendlich entfernen, so konvergiert diese *Dirichlet*sche Reihe auch für $\Re(z) > b$." Dieser Satz des Herrn *Cahen* ist durch das Beispiel der Reihe (39.) ebenfalls als unrichtig nachgewiesen.

In § 17 a. a. O. sagt Herr *Cahen* weiter: „Wenn zwei *Dirichlet*sche Reihen für $\Re(z) > \delta$ konvergieren und beide ein Gebiet absoluter Konvergenz haben, so ist auch ihr Produkt eine *Dirichlet*sche Reihe, die für $\Re(z) > \delta$ konvergiert." Den Beweis stützt Herr *Cahen* wesentlich auf den zuvor erwähnten unrichtigen Satz. Daß letzterer nicht genügend bewiesen, also zweifelhaft ist, hat kürzlich Herr *Landau* konstatiert*). Nachdem der Satz aber nunmehr direkt als falsch nachgewiesen ist, erscheint der daraus gefolgerte Produktsatz nur um so unsicherer. Doch gelang es mir nicht, ihn durch ein Beispiel vollständig zu widerlegen**).

*) In der auf Seite 95 zitierten Arbeit, § 6.

**) Inzwischen wurden nun die dahin zielenden Bemühungen des Herrn *Landau* von Erfolg gekrönt. In § 14 seiner während des Druckes dieser Arbeit erschienenen Abhandlung „Beiträge zur analytischen Zahlentheorie" (Rendiconti del circolo matematico

Ich bemerke zum Schluß dieser Entwicklung, daß auch das allgemeinere Integral

$$\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{f(z)}{z^{\mu}}\,dz, \qquad (a>0)$$

wo μ eine reelle Zahl $\geqq 1$ bedeutet, nach Einsetzung der *Dirichlet*schen Reihe für $f(z)$ gliedweise ausgeführt werden darf. Der Beweis bleibt ganz der gleiche, wie wir ihn für $\mu = 1$ durchgeführt haben.*) Dagegen versagt unsere Methode für $\mu < 1$. An Stelle des auf S. 119 unten betrachteten Quotienten tritt nämlich jetzt der allgemeinere Ausdruck

$$\frac{|x - ih_1 - \zeta|}{|x - ih_1 - \gamma|^{\mu}},$$

und dieser bleibt für $\mu < 1$ mit wachsendem h_1 nicht endlich. Damit fällt der ganze Beweis, und es bleibt unentschieden, ob auch für $\mu < 1$ die gliedweise Integration gestattet ist.

§ 6.

Ich wende mich nun zu einigen weiteren Formeln, die sich ebenfalls mit unzureichendem Beweis in der Arbeit des Herrn *Cahen* finden. In § 13 behandelt Herr *Cahen* einen eigentümlichen Zusammenhang zwischen zwei verschiedenen *Dirichlet*schen Reihen.

Sind in der Reihe

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\lambda_n z} \tag{46.}$$

alle Exponenten λ_n positiv und bezeichnet man mit

---

di Palermo, tomo 26 (1908)) hat er unter Benutzung früher von ihm erlangter Teilresultate den *Cahen*schen Produktsatz wirklich als unrichtig nachgewiesen.

*) Für $\mu > 2$ läßt sich der Beweis sogar sehr viel einfacher führen, auf Grund der Tatsache, daß dann das Integral absolut konvergiert, was für $\mu \leqq 2$ im allgemeinen nicht der Fall ist.

$$\mu_n = \log \lambda_n \tag{47.}$$

den reellen Logarithmus von λ_n, so wächst mit λ_n auch μ_n monoton ins Unendliche und folglich ist

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\mu_n z} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{\lambda_n{}^z} \tag{48.}$$

ebenfalls eine *Dirichlet*sche Reihe. Unter der Voraussetzung, daß diese letztere nicht überall divergiert, also etwa für $\Re(z) > a \geqq 0$ konvergiert, beweist Herr *Cahen* a. a. O. § 13 ganz richtig, daß die Reihe (46.) mindestens für $\Re(z) > 0$ konvergiert. Aus der bekannten Formel

$$\Gamma(z)\, e^{-\mu_n z} = \frac{\Gamma(z)}{\lambda_n{}^z} = \int_0^{\infty} x^{z-1} e^{-\lambda_n x}\, dx \qquad (\text{für } \Re(z) > 0) \tag{49.}$$

schließt er dann durch Summation sogleich für $\Re(z) > a$:

$$\Gamma(z) f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \int_0^{\infty} x^{z-1} e^{-\lambda_n x}\, dx$$

$$= \int_0^{\infty} \Big(\sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\lambda_n x} \Big) x^{z-1}\, dx = \int_0^{\infty} F(x)\, x^{z-1}\, dx.$$

Diese Vertauschung von Summe und Integral ist aber aus zwei Gründen unstatthaft. Erstens nämlich wegen der oberen Integrationsgrenze ∞, für welche ja die gleichmäßige Konvergenz nichts mehr nützt. Zweitens aber auch wegen der unteren Integrationsgrenze 0; denn die Reihe $F(x)$ konvergiert im allgemeinen nur für $x > 0$, während sie für $x = 0$ sehr wohl divergieren kann.

Herr *Cahen* knüpft an seine unzureichend bewiesene Formel noch die folgende Bemerkung. Da das Integral

$$\int_0^{\infty} F(x)\, x^{z-1}\, dx$$

für $\Re(z) > a$ den Wert $\Gamma(z)f(z)$ hat, also jedenfalls existiert, so kann $F(x)$ für $x = 0$ nicht so stark unendlich werden wie $\frac{1}{x^{a+\varepsilon}}$, wie klein auch die positive Zahl ε ist; $F(x)$ kann aber auch endlich bleiben.

Korrekterweise müßte man jedoch gerade umgekehrt verfahren: Zuerst ist direkt nachzuweisen, daß $F(x)$ für $x = 0$ von geringerem Grad unendlich wird wie $\frac{1}{x^{a+\varepsilon}}$, und daraus folgt dann erst, daß das fragliche Integral mit der unteren Grenze 0 überhaupt einen Sinn hat.

Ich schicke folgenden Hilfssatz voraus:

Hilfssatz:

Sind λ, a, b positive Zahlen, so besteht die Ungleichung

$$\int_{\lambda}^{\infty} u^{a-1} e^{-bu} du < e^{-\lambda \frac{b}{2}} \frac{\Gamma(a)}{\left(\frac{b}{2}\right)^a}. \tag{50.}$$

Beweis: Bedeutet β eine positive Zahl, kleiner als b, so ist

$$\int_{\lambda}^{\infty} u^{a-1} e^{-bu} du = \int_{\lambda}^{\infty} e^{-u\beta} u^{a-1} e^{-(b-\beta)u} du$$

$$< e^{-\lambda\beta} \int_{\lambda}^{\infty} u^{a-1} e^{-(b-\beta)u} du < e^{-\lambda\beta} \int_{0}^{\infty} u^{a-1} e^{-(b-\beta)u} du$$

$$= e^{-\lambda\beta} \frac{\Gamma(a)}{(b-\beta)^a}.$$

Wählt man speziell $\beta = \frac{b}{2}$, so entsteht hieraus die gewünschte Ungleichung.

Wir nehmen jetzt an, die Reihe (48.) sei für $\Re(z) > a \geqq 0$ konvergent.*) Bedeutet dann ε eine beliebig kleine positive Zahl und setzt man

$$\sum_{n=1}^{N} c_n e^{-\mu_n(a+\varepsilon)} = C_N, \quad C_0 = 0, \tag{51.}$$

*) Damit soll nicht gesagt sein, daß die Reihe für $\Re(z) < a$ divergiert. Liegt die Konvergenzgerade nicht links von der imaginären Achse, so kann a auf der Konvergenzgeraden angenommen werden. Andernfalls muß a rechts von ihr liegen, da in den folgenden Ausführungen a nicht negativ sein kann.

so ist

$$|C_N| < C, \tag{52.}$$

wo C von N unabhängig ist (nicht aber von ε).

Um jetzt die Konvergenz der Reihe (46.) zu untersuchen und zugleich ihren Rest passend abzuschätzen, seien N und M beliebige Indizes und $M > N \geqq 0$. Dann ist für reelle positive x:

$$\sum_{n=N+1}^{M} c_n e^{-\lambda_n x} = \sum_{n=N+1}^{M} c_n e^{-\mu_n (a+\varepsilon)} \lambda_n^{a+\varepsilon} e^{-\lambda_n x}$$

$$= \sum_{n=N+1}^{M} (C_n - C_{n-1}) \lambda_n^{a+\varepsilon} e^{-\lambda_n x}$$

$$= \sum_{n=N+1}^{M} C_n (\lambda_n^{a+\varepsilon} e^{-\lambda_n x} - \lambda_{n+1}^{a+\varepsilon} e^{-\lambda_{n+1} x}) - C_N \lambda_{N+1}^{a+\varepsilon} e^{-\lambda_{N+1} x} + C_M \lambda_{M+1}^{a+\varepsilon} e^{-\lambda_{M+1} x},$$

also mit Rücksicht auf (52.):

$$\begin{aligned} \Big|\sum_{n=N+1}^{M} c_n e^{-\lambda_n x}\Big| < C \sum_{n=N+1}^{M} |\lambda_n^{a+\varepsilon} e^{-\lambda_n x} - \lambda_{n+1}^{a+\varepsilon} e^{-\lambda_{n+1} x}| \\ + C \lambda_{N+1}^{a+\varepsilon} e^{-\lambda_{N+1} x} + C \lambda_{M+1}^{a+\varepsilon} e^{-\lambda_{M+1} x}. \end{aligned} \tag{53.}$$

Nun ist aber, da wir $x > 0$ vorausgesetzt haben,

$$|\lambda_n^{a+\varepsilon} e^{-\lambda_n x} - \lambda_{n+1}^{a+\varepsilon} e^{-\lambda_{n+1} x}| = \Big|\int_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}} \frac{d(u^{a+\varepsilon} e^{-ux})}{du} du\Big|$$

$$= \Big|\int_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}} u^{a+\varepsilon-1} e^{-ux} (a+\varepsilon - xu)\, du\Big|$$

$$< (a+\varepsilon) \int_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}} u^{a+\varepsilon-1} e^{-ux} du + x \int_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}} u^{a+\varepsilon} e^{-ux} du.$$

Daher durch Summation nach n:

$$\sum_{n=N+1}^{M} |\lambda_n^{a+\varepsilon} e^{-\lambda_n x} - \lambda_{n+1}^{a+\varepsilon} e^{-\lambda_{n+1} x}|$$

$$< (a+\varepsilon) \int_{\lambda_{N+1}}^{\lambda_{M+1}} u^{a+\varepsilon-1} e^{-ux} du + x \int_{\lambda_{N+1}}^{\lambda_{M+1}} u^{a+\varepsilon} e^{-ux} du.$$

Hier wird aber die rechte Seite noch vergrößert, wenn die obere Grenze der Integrale ins Unendliche gerückt wird. Unter Anwendung der Formel (50.) erhält man dann:

$$\sum_{n=N+1}^{M} \left| \lambda_n^{a+\varepsilon} e^{-\lambda_n x} - \lambda_{n+1}^{a+\varepsilon} e^{-\lambda_{n+1} x} \right|$$

$$< (a+\varepsilon)\, e^{-\lambda_{N+1} \frac{x}{2}} \frac{\Gamma(a+\varepsilon)}{\left(\frac{x}{2}\right)^{a+\varepsilon}} + x\, e^{-\lambda_{N+1} \frac{x}{2}} \frac{\Gamma(a+\varepsilon+1)}{\left(\frac{x}{2}\right)^{a+\varepsilon+1}}$$

$$= 3 e^{-\lambda_{N+1} \frac{x}{2}} \frac{\Gamma(a+\varepsilon+1)}{\left(\frac{x}{2}\right)^{a+\varepsilon}}.$$

Führt man dies in (53.) ein, so kommt schließlich

$$(54.)\qquad \left| \sum_{n=N+1}^{M} c_n e^{-\lambda_n x} \right| < 3 C e^{-\lambda_{N+1} \frac{x}{2}} \frac{\Gamma(a+\varepsilon+1)}{\left(\frac{x}{2}\right)^{a+\varepsilon}} + C \lambda_{N+1}^{a+\varepsilon} e^{-\lambda_{N+1} x} + C \lambda_{M+1}^{a+\varepsilon} e^{-\lambda_{M+1} x}.$$

Da die rechte Seite mit wachsendem N unter jede Grenze sinkt, wie stark auch gleichzeitig M wächst, so folgt, daß die Reihe

$$(46.)\qquad F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\lambda_n z}$$

für reelle positive Werte der Variabeln z konvergiert. Als *Dirichlet*sche Reihe konvergiert sie daher mindestens für $\Re(z) > 0$.

Aus (54.) folgt für $\lim M = \infty$:

$$(55.)\qquad \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} c_n e^{-\lambda_n x} \right| \leq 3 C e^{-\lambda_{N+1} \frac{x}{2}} \frac{\Gamma(a+\varepsilon+1)}{\left(\frac{x}{2}\right)^{a+\varepsilon}} + C \lambda_{N+1}^{a+\varepsilon} e^{-\lambda_{N+1} x},$$

und daher speziell für $N = 0$:

$$|F(x)| < 3C e^{-\lambda_1 \frac{x}{2}} \frac{\Gamma(a+\varepsilon+1)}{\left(\frac{x}{2}\right)^{a+\varepsilon}} + C \lambda_1^{a+\varepsilon} e^{-\lambda_1 x}. \tag{56.}$$

Daraus geht sogleich hervor, daß das Integral

$$\int_0^\infty F(x)\, x^{z-1}\, dx$$

für $\Re(z) > a+\varepsilon$ *existiert, selbst wenn die Reihe* $F(x)$ *für* $x = 0$ *gar nicht mehr konvergiert.*

Aus der für $\Re(z) > 0$ giltigen Formel

$$\Gamma(z)\, e^{-\mu_n z} = \int_0^\infty x^{z-1} e^{-\lambda_n x}\, dx \tag{49.}$$

folgt durch Summation nach n:

$$\begin{aligned} \Gamma(z) \sum_{n=1}^{N} c_n e^{-\mu_n z} &= \sum_{n=1}^{N} c_n \int_0^\infty x^{z-1} e^{-\lambda_n x} dx \\ &= \int_0^\infty \left(\sum_{n=1}^{N} c_n e^{-\lambda_n x} \right) x^{z-1} dx \\ &= \int_0^\infty \left(F(x) - \sum_{n=N+1}^{\infty} c_n e^{-\lambda_n x} \right) x^{z-1} dx. \end{aligned}$$

Für $\Re(z) > a+\varepsilon$ kann man statt dessen schreiben:

$$\Gamma(z) \sum_{n=1}^{N} c_n e^{-\mu_n z} = \int_0^\infty F(x)\, x^{z-1}\, dx - \int_0^\infty \left(\sum_{n=N+1}^{\infty} c_n e^{-\lambda_n x} \right) x^{z-1} dx.$$

Das letzte dieser Integrale erweist sich aber, wenn man den Integranden nach Formel (55.) abschätzt, als absolut nicht größer als

$$3\,C\,\Gamma(a+\varepsilon+1)2^{a+\varepsilon}\int_0^\infty e^{-\lambda_{N+1}\frac{x}{2}}\,x^{\Re(z)-a-\varepsilon-1}\,dx$$

$$+\,C\,\lambda_{N+1}^{a+\varepsilon}\int_0^\infty e^{-\lambda_{N+1}x}x^{\Re(z)-1}\,dx$$

$$=3\,C\,\Gamma(a+\varepsilon+1)\,2^{a+\varepsilon}\frac{\Gamma(\Re(z)-a-\varepsilon)}{\left(\frac{\lambda_{N+1}}{2}\right)^{\Re(z)-a-\varepsilon}}+\frac{C\Gamma(\Re(z))}{\lambda_{N+1}^{\Re(z)-a-\varepsilon}};$$

es sinkt also mit wachsendem N unter jede Grenze. Daher folgt

$$\Gamma(z)\lim_{N=\infty}\sum_{n=1}^{N}c_n e^{-\mu_n z}=\int_0^\infty F(x)\,x^{z-1}\,dx,$$

oder, was wegen (48.) dasselbe ist:

$$\Gamma(z)f(z)=\int_0^\infty F(x)x^{z-1}dx. \tag{57.}$$

Diese Formel gilt nun für $\Re(z)>a+\varepsilon$; da aber ε beliebig klein sein darf, so gilt sie jedenfalls für $\Re(z)>a$, womit die Formel des Herrn *Cahen* in aller Strenge bewiesen ist.

Die Gleichung (57.) läßt sich leicht etwas verallgemeinern. Bedeutet nämlich ν eine positive Zahl, und setzt man λ_n^ν an Stelle von λ_n, so kommt

$$\Gamma(z)\sum_{n=1}^{\infty}c_n e^{-\nu\log\lambda_n z}=\int_0^\infty\left(\sum_{n=1}^{\infty}c_n e^{-\lambda_n^\nu x}\right)x^{z-1}\,dx,$$

oder, was dasselbe sagt:

$$\Gamma(z)f(\nu z)=\int_0^\infty\left(\sum_{n=1}^{\infty}c_n e^{-\lambda_n^\nu x}\right)x^{z-1}\,dx.$$

Dies gilt für $\Re(\nu z)>a$, da ja die Reihe $f(\nu z)$ für $\Re(\nu z)>a\geqq 0$ konvergiert. Setzt man $\frac{z}{\nu}$ an Stelle von z, so kommt schließlich

$$(58.)\qquad \Gamma\left(\frac{z}{\nu}\right)f(z)=\int_0^\infty \left(\sum_{n=1}^\infty c_n e^{-\lambda_n^\nu x}\right) x^{\frac{z}{\nu}-1}\,dx,$$

eine Formel, die wieder für $\Re(z) > a$ gilt. Dies ist die gesuchte Verallgemeinerung von (57.).

Ein spezieller Fall der Gleichung (58.) spielt in der Theorie der *Riemann*schen Zetafunktion eine Rolle, wozu indes folgendes zu bemerken ist. Setzt man $c_n = 1$, $\lambda_n = n$, so wird

$$f(z)=\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^z}=\zeta(z).$$

Da diese Reihe für $\Re(z) > 1$ konvergiert, so ergibt die Formel (58.) für $\nu = 2$:

$$(59.)\qquad \Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\zeta(z)=\int_0^\infty \left(\sum_{n=1}^\infty e^{-n^2 x}\right) x^{\frac{z}{2}-1}\,dx. \qquad (\Re(z)>1)$$

Riemann und seine Nachfolger gewinnen diese Formel lediglich durch unendliche Summation aus der Gleichung

$$\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\frac{1}{n^z}=\int_0^\infty e^{-n^2 x} x^{\frac{z}{2}-1}\,dx,$$

und benutzen später zur Umgestaltung des Integrals (59.) die Transformationsformel

$$(60.)\qquad \sum_{n=1}^\infty e^{-n^2 x}=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{x}}\left(1+2\sum_{n=1}^\infty e^{-\frac{\pi^2 n^2}{x}}\right).$$

Diese müßte indes schon viel früher herangezogen werden. Denn bei dem Integral (59.) liegt gerade der Fall vor, daß die in dem Integranden auftretende Summe

$$(61.)\qquad \sum_{n=1}^\infty e^{-n^2 x}$$

an der unteren Integrationsgrenze $x=0$ nicht mehr konvergiert. Die Existenz des Integrals (59.) für $\Re(z)>1$ kann dann mangels der allgemeinen Methode, die ich in diesem Paragraphen auseinandersetzte, überhaupt nur mittels der Formel (60.) nachgewiesen werden, welche eben zeigt, daß die Summe (61.) für $x=0$ nur so stark unendlich wird wie $\frac{1}{\sqrt{x}}$. Die Transformationsformel (60.) müßte also bereits an einer früheren Stelle benutzt werden, als dies durchweg geschieht, nämlich schon zum *Beweis* der Gleichung (59.), nicht erst zu deren weiterer Umformung.

Das gleiche gilt auch von den entsprechenden Entwicklungen, welche in den Arbeiten über allgemeinere Zetafunktionen von *Lipschitz**), *Epstein***), *Herglotz****) vorkommen.

§ 7.

Herr *Cahen* gelangt in § 16 a. a. O. zu der Formel

$$F(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{b-i\infty}^{b+i\infty}\Gamma(z)f(z)x^{-z}\,dz, \qquad \text{(für } b>a) \tag{62.}$$

welche gewissermaßen die Umkehrung von (57.) ist, indem $F(z)$, $f(z)$, a die gleiche Bedeutung haben wie im vorigen Paragraphen.

Er geht dabei aus von der bekannten Gleichung

$$e^{-x}=\frac{1}{2\pi i}\int_{b-i\infty}^{b+i\infty}\Gamma(z)x^{-z}\,dz, \tag{63.}$$

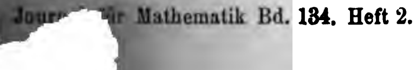
wo für die Definition des Integrals die Formel (34.) gewählt werden darf (S. 122). Setzt man $\lambda_n x$ an Stelle von x, so kommt

$$e^{-\lambda_n x}=\frac{1}{2\pi i}\int_{b-i\infty}^{b+i\infty}\Gamma(z)e^{-\mu_n z}x^{-z}\,dz. \tag{64.}$$

*) Untersuchungen der Eigenschaften einer Gattung von unendlichen Reihen, § 2. Dieses Journal, Bd. 105.

**) Zur Theorie allgemeiner Zetafunktionen, § 1. Math. Annal., Bd. 56.

***) Über die analytische Fortsetzung gewisser *Dirichlet*scher Reihen, § 2. Math. Annal., Bd. 61.



Durch unendliche Summation entsteht hieraus die gewünschte Gleichung, sofern auf der rechten Seite die Vertauschung von Summe und Integral gestattet ist. Da Herr *Cahen* aber die wegen der unendlichen Länge des Integrationsweges wieder durchaus notwendige Begründung dieser Vertauschung unterläßt, so ist sein Beweis wiederum nicht einwandfrei.

Bekanntlich gilt die Formel (63.) und folglich auch (64.) für alle komplexen Werte von x mit positiv reellem Teil, und zwar ist unter x^{-z} der Wert $e^{-z\log x}$ zu verstehen, wo der imaginäre Teil von $\log x$ zwischen $-\frac{i\pi}{2}$ und $+\frac{i\pi}{2}$ liegt. Im selben Umfang wollen wir jetzt auch die Gültigkeit von (62.) nachweisen.

Man erhält aus (64.):

$$\sum_{n=1}^{N} c_n e^{-\lambda_n x} = \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=1}^{N} c_n \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \Gamma(z)\, e^{-\mu_n z} x^{-z}\, dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \Gamma(z)\Big(\sum_{n=1}^{N} c_n e^{-\mu_n z}\Big) x^{-z}\, dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \Gamma(z)\Big\{f(z) - \sum_{n=N+1}^{\infty} c_n e^{-\mu_n z}\Big\} x^{-z}\, dz.$$

Hieraus folgt aber sofort die gewünschte Gleichung (62.), sobald es gelingt zu beweisen, daß das Integral

$$\text{(65.)} \qquad \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \Gamma(z)\Big(\sum_{n=N+1}^{\infty} c_n e^{-\mu_n z}\Big) x^{-z}\, dz$$

existiert und mit wachsendem N dem Grenzwert Null zustrebt.

Nach Voraussetzung ist $b > a$, und die Reihe $f(z)$ konvergiert für $\Re(z) > a$. Bedeutet also ζ eine reelle Zahl zwischen a und b, so konvergiert die Reihe $f(\zeta)$. Daher ist

$$\Big|\sum_{n=1}^{N} c_n e^{-\mu_n \zeta}\Big| = |C_N| < C,$$

wo C von N nicht abhängt. Durch partielle Summation folgt für $\Re(z) > \zeta$:

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} c_n e^{-\mu_n z} = \sum_{n=N+1}^{\infty} c_n e^{-\mu_n \zeta} \cdot e^{-\mu_n (z-\zeta)}$$

$$= \sum_{n=N+1}^{\infty} C_n (e^{-\mu_n (z-\zeta)} - e^{-\mu_{n+1} (z-\zeta)}) - C_N e^{-\mu_{N+1} (z-\zeta)}.$$

Also, wenn man die Glieder der Summe nach Formel (5.) abschätzt:

$$\left| \sum_{n=N+1}^{\infty} c_n e^{-\mu_n z} \right| < C \frac{|z-\zeta|}{\Re(z-\zeta)} e^{-\mu_{N+1} \Re(z-\zeta)} + C e^{-\mu_{N+1} \Re(z-\zeta)}$$

$$< 2C \frac{|z-\zeta|}{\Re(z-\zeta)} e^{-\mu_{N+1} \Re(z-\zeta)}.$$

Längs des Integrationsweges des Integrals (65.) ist nun $\Re(z) = b > \zeta$, also zufolge der eben bewiesenen Ungleichung auch:

$$\left| \sum_{n=N+1}^{\infty} c_n e^{-\mu_n z} \right| < 2C \frac{|z-\zeta|}{b-\zeta} e^{-\mu_{N+1} (b-\zeta)}.$$

Daher existiert gewiß daß Integral (65.) und ist absolut kleiner als

$$(66.) \qquad \frac{2C}{b-\zeta} e^{-\mu_{N+1} (b-\zeta)} \int_{-\infty}^{\infty} |\Gamma(b+iu)\, x^{-(b+iu)} (b+iu-\zeta)|\, du,$$

sofern nur dieses letzte Integral, welches von N nicht mehr abhängt, konvergiert. **Dies ist aber wirklich der Fall. Denn erstens beweist man leicht die Ungleichung:***)

$$|\Gamma(b+iu)| < (b+|u|)^{b-\frac{1}{2}} e^{-\frac{\pi}{2}|u|} \cdot \Phi,$$

wo Φ von u nicht abhängt.

Zweitens ist, wenn $x = |x| e^{i\vartheta}$ gesetzt wird:

$$|x^{-(b+iu)}| = |x|^{-b} e^{\vartheta u} \leq |x|^{-b} e^{|\vartheta u|}.$$

Dabei bedeutet $i\vartheta$ den imaginären Teil von $\log x$, so daß nach Voraussetzung $-\frac{\pi}{2} < \vartheta < \frac{\pi}{2}$ ist.

---

*) Vgl. *Nielsen*, Handbuch der Theorie der Gammafunktion, Leipzig 1906; S. 97.

Drittens ist auch

$$|b+iu-\zeta|< b+|u|.$$

Zusammenfassend erhält man also:

$$|\Gamma(b+iu)x^{-(b+iu)}(b+iu-\zeta)|<(b+|u|)^{b+\frac{1}{2}}x^{-b}e^{-\left(\frac{\pi}{2}-|\vartheta|\right)|u|}.\Phi.$$

Dieser letzte Ausdruck ist aber wegen $\frac{\pi}{2}-|\vartheta|>0$ von $u=-\infty$ bis $+\infty$ integrierbar; also ist es auch der erste, womit gezeigt ist, daß das in (66.) auftretende Integral konvergiert. Ist Ω sein Wert, so existiert also auch das Integral (65.) und ist absolut kleiner als

$$\frac{2C}{b-\zeta}e^{-\mu_{N+1}(b-\zeta)}\Omega.$$

Da dieser Ausdruck mit wachsendem N unter jede Grenze sinkt, weil ja Ω von N nicht abhängt, so ist damit unser Beweis der Formel (62.) beendet.

Ich möchte zum Schluß bemerken, daß wir die Gleichung (62.) für alle *komplexen* x bewiesen haben, deren reeller Teil positiv ist. In der inversen Formel (57.) dagegen kommen nur *reelle* positive x in Frage. Dieser Gegensatz verschwindet, wenn man bemerkt, daß das in (57.) auftretende Integral statt längs der reellen positiven Achse ebenso gut längs eines beliebigen anderen vom Nullpunkt auslaufenden Strahles geführt werden darf, der mit der positiven Achse einen Winkel kleiner als $\frac{\pi}{2}$ bildet. Mit anderen Worten, es gilt auch die Formel:

$$(57^a.)\qquad \Gamma(z)f(z)=\int_0^{\infty e^{i\vartheta}} F(x)x^{z-1}dx$$

für alle ϑ zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$, die Grenzen ausgeschlossen. Der Beweis ergibt sich ganz wie im vorigen Paragraphen, wenn man bedenkt, daß für

das Integral (49.), welches die Gammafunktion darstellt, bekanntlich dieser Integrationsweg zulässig ist. Bei der unendlichen Summation macht dann namentlich wieder das Verhalten von $F(x)$ Schwierigkeit, wenn sich x längs dieses Strahles dem Nullpunkt nähert. Doch läßt sich dies Verhalten ganz analog bestimmen, wie wir es S. 134 f. für die reelle Achse getan haben, woraus dann leicht die gewünschte Formel (57ª.) folgt.

Nachtrag. Während des Druckes dieser Arbeit erschienen zwei kleine Noten des Herrn *J. Hadamard*, die sich mit dem in § 4 und 5 behandelten Gegenstand befassen*). Da Herr *Hadamard* daselbst einleitend behauptet, man könne die Lücken der *Cahen*schen Beweisführung ganz leicht beseitigen und die *Cahen*schen Bedingungen dahin ergänzen, daß sie wirklich notwendig und hinreichend seien, so scheint es, als ob er auf wenigen Seiten weit über meine Resultate hinauskommt. Aber dem ist nicht so; denn Herr *Hadamard* macht alsbald die sehr weitgehende, weder von Herrn *Cahen* noch von mir gemachte Einschränkung, daß der Quotient $\frac{\log n}{\lambda_n}$ einen endlichen oberen Limes hat. Nur unter dieser Voraussetzung, durch welche beispielsweise auch die Existenz einer absoluten Konvergenzhalbebene involviert wird, gelingt es ihm, die oben gefundenen Eigenschaften des Integrals

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\Big(\sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\lambda_n z}\Big)\frac{e^{wz}}{z}\,dz$$

nachzuweisen. Was dann die verbesserten notwendigen und hinreichenden Bedingungen betrifft, die übrigens, nachdem sie in der zweiten Note wegen eines vorher begangenen Fehlers nochmals eine Ergänzung erfahren mußten, fast auf eine Tautologie hinauslaufen, so gelten sie natürlich auch nur unter der gleichen Einschränkung. Für die *allgemeinen Dirichlet*schen Reihen dagegen wird durch die *Hadamard*sche Analyse absolut nichts gewonnen.

---

*) „Sur les séries de *Dirichlet*", und: „Rectification à la note ‚sur les séries de *Dirichlet*'". Rendiconti del circolo matematico di Palermo, Bd. 25 (1908).

Über lineare Differentialgleichungen mit algebraischen Koeffizienten.

Zusatz zu den Abhandlungen des Verfassers in den Bänden 123 und 126 dieses Journals.

Von Herrn *L. W. Thomé* in Greifswald.

Es werden Einschränkungen, welche bei der Zerlegung eines homogenen linearen Differentialausdruckes mit algebraischen Koeffizienten in Abhandlung Bd. 123 gemacht waren, hier beseitigt. Dabei kommt die Arbeit in Bd. 126 über algebraische Funktionen in Betracht.

1.

In Bd. 123 S. 68 Z. 1 von unten werde statt „c eine Konstante" die Verallgemeinerung gesetzt: „c ein ganzer rationaler Ausdruck von s höchstens $(\sigma-2)$-ten Grades mit konstanten Koeffizienten". Hierbei bleibt das S. 73 Gesagte bestehen. (S. 72 Z. 7 von unten ist vor „der Koeffizient c_1" einzuschieben „bei $R>1$"). Bei Bestimmung der determinierenden Faktoren wird der nach Nr. 6 II C zu ermittelnde Teil dann vollständig bestimmt.

2.

Es wird nun weiter vorausgesetzt, daß die in Abh. Bd. 123 in den Koeffizienten der Differentialgleichung vorkommende algebraische Funktion s eine *Kronecker*sche Funktion ist, über welche die Abhandlung des Verfassers in Bd. 126 handelt, d. h. eine ganze algebraische Funktion, bei welcher der außerwesentliche Teiler der Diskriminante das Quadrat eines Polynoms ist mit Linearfaktoren, die untereinander und von denen des wesentlichen Teilers verschieden sind. Bei $x=\infty$ erfülle diese Funktion s folgende Bedingung. Wenn $x=t^{-1}$, $st^l=s'$ gesetzt ist nach den Angaben in Abh. Bd. 123 S. 76, so sollen die bei $t=0$ endlichen Zweige von s entweder für $t=0$ untereinander verschieden sein oder die Bd. 123 S. 72 angegebene Bedingung erfüllen.

Man kann nach dem in Abh. Bd. 126 S. 69 Gesagten voraussetzen, daß eine solche algebraische Funktion s in die Koeffizienten der Differentialgleichung eingeführt sei. Bei Bestimmung der determinierenden Faktoren wird der bei $x=\infty$ nach Abh. Bd. 123 Nr. 6 III zu ermittelnde Teil jetzt eindeutig erhalten. Es ist dann noch die am Schluß von Nr. 6 III angegebene Bedingung zu erfüllen.

In dem Falle $s^2-P(x)=0$, wo $P(x)$ ein Polynom von x mit einfachen Linearfaktoren ist, hat s die angegebene Eigenschaft, und es ist der in Abh. Bd. 123 S. 76 aufgestellte für die Regularität der linearen Differentialgleichung hinreichende Typus nach dem dort S. 79, 80 Gesagten zugleich dafür notwendig.

Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen.

Nachtrag zu früheren Abhandlungen des Verfassers.

Von Herrn *L. W. Thomé* in Greifswald.

Die früher in diesem Journal vorgetragene Theorie wird in Nachstehendem vervollständigt. In den Koeffizienten der linearen Differentialgleichung soll rational neben der unabhängigen Variablen eine *Kronecker*sche ganze algebraische Funktion vorkommen (siehe die vorhergehende Arbeit). Nun wird in Nr. 1 der allgemeinste Typus eines regulären linearen Differentialausdruckes aufgestellt. Alsdann enthält Nr. 2 die Zerlegung eines homogenen linearen Differentialausdruckes mit Koeffizienten der genannten Art in ein System, dessen erster Bestandteil ein regulärer Differentialausdruck von allgemeinstem Typus ist. Hierin liegt die Verallgemeinerung der in der Abhandlung des Verfassers in Band 123 Nr. 7 angestellten Untersuchungen. Im Anschluß daran stehen in Nr. 3 und Nr. 4 weitere Bemerkungen zur Integration von einzelnen und von simultanen linearen Differentialgleichungen.

1.

Der allgemeinste Typus eines regulären Differentialausdruckes.

Der Differentialausdruck $F_m(y, s, x)$ ist

$$\frac{d^m y}{dx^m} + p_1 \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \cdots + p_m y. \tag{1.}$$

Die Koeffizienten p haben die Form

$$\begin{cases} p_\alpha = \dfrac{H_\alpha(s, x)}{K_\alpha(x)}, \\ H_\alpha(s, x) = H_{\alpha 1}(x) s^{\sigma-1} + H_{\alpha 2}(x) s^{\sigma-2} + \cdots + H_{\alpha\sigma}(x), \end{cases} \tag{2.}$$

worin die $H(x)$ und $K(x)$ ganze rationale Funktionen von x ohne gemeinsamen Teiler sind, s eine *Kronecker*sche ganze algebraische Funktion aus einer irreduktiblen Gleichung σ-ten Grades ist (siehe Abh. Bd. 126 dieses Journals und die hier vorhergehende Arbeit). Der außerwesentliche Teiler der Diskriminante von s ist das Quadrat eines Polynoms

$$(3.)\qquad D(x)=(x-b_1)(x-b_2)\cdots(x-b_\mu),$$

dessen Linearfaktoren untereinander und von denen des wesentlichen Teilers verschieden sind. Bei einem Punkte $x=b$ (3.) sind die σ Zweige von s, s_1 bis s_σ einwertig; dieselben nehmen in $x=b$ bezüglich die Werte S_1, S_2 bis S_σ an, von denen S_1 bis $S_{\sigma-1}$ untereinander verschieden sind, $S_{\sigma-1}=S_\sigma$; $\left(\frac{ds_{\sigma-1}}{dx}\right)_{x=b}$ ist verschieden von $\left(\frac{ds_\sigma}{dx}\right)_{x=b}$.

Ein „im Bereiche von s regulärer linearer Differentialausdruck" ist in Abh. Bd. 123 Nr. 2 definiert. An die dort gegebenen Untersuchungen schließt sich das Folgende an, um den allgemeinsten im Bereiche von s regulären Differentialausdruck (1.) zu bilden.

I. Zufolge der Resultate in Nr. 2 I und II a. a. O. ist bei einem Punkte, in welchem die Diskriminante von s nicht verschwindet (a. a. O. II A.), oder in welchem der wesentliche Teiler der Diskriminante verschwindet (a. a. O. II B.) für die Regularität von (1.) notwendig und hinreichend, daß in p_α der Nenner $K_\alpha(x)$ höchstens in α-ter Ordnung Null wird.

Es ist nun der Ausdruck von p_α bei einem Punkte $x=b$ zu ermitteln, in welchem der außerwesentliche Teiler der Diskriminante verschwindet.

p_α sei der Ausdruck (2.), $K_\alpha(x)=(x-b)^{r_\alpha}\bar{K}_\alpha(x)$, $\bar{K}_\alpha(b)$ von Null verschieden. p_α soll bei allen σ-Zweigen von s in $x=b$ höchstens in α-ter Ordnung unendlich werden. Es sei $r_\alpha>\alpha$, dann muß $H_\alpha(s,x)_{x=b}$ verschwinden. $H_\alpha(s,b)$ ist ein Polynom von s höchstens $(\sigma-1)$-ten Grades, welches für $s=S_1$ bis $S_{\sigma-1}$, $S_{\sigma-1}=S_\sigma$ verschwindet, daher wenn

$$(4.)\qquad (s-S_1)(s-S_2)\dots(s-S_{\sigma-1})=f(s)$$

gesetzt wird, so wird

$$(5.)\qquad H_\alpha(s,b)=k\,f(s),$$

wo k eine Konstante. Dann hat

$$(6.)\qquad \frac{d\,H_\alpha(s,b)}{ds}\,\frac{ds}{dx}$$

für $s=s_{\sigma-1}$ und $s=s_\sigma$ in $x=b$ zwei verschiedene Werte, daher kann r_α nicht größer als $\alpha+1$ sein.

II. Nun seien bei dem Punkte $x=b_\varrho$ (3.) die Werte von s durch $S_{\varrho 1}, S_{\varrho 2}, \ldots S_{\varrho,\sigma-2}, S_{\varrho,\sigma-1}=S_{\varrho,\sigma}$ bezeichnet und

$$(7.)\qquad (s-S_{\varrho 1})(s-S_{\varrho 2})\cdots(s-S_{\varrho,\sigma-1})=f_\varrho(s)$$

gesetzt. Es wird der Ausdruck

$$(8.)\qquad \frac{c_{\alpha 1}f_1(s)}{x-b_1}+\frac{c_{\alpha 2}f_2(s)}{x-b_2}+\cdots+\frac{c_{\alpha\mu}f_\mu(s)}{x-b_\mu}=P_\alpha(s,x)$$

gebildet, wo die c Konstanten, und es sei

$$(9.)\qquad \psi(x)=(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n),$$

wo die a beliebige untereinander verschiedene Punkte sind. Dann folgt aus I, daß p_α die Form hat

$$(10.)\qquad p_\alpha=\frac{P_\alpha(s,x)}{(D(x))^\alpha}+\frac{Q_\alpha(s,x)}{(\psi(x))^\alpha},$$

wo $Q_\alpha(s,x)$ ein ganzer rationaler Ausdruck von s und x in bezug auf s höchstens $(\sigma-1)$-ten Grades, während über den Grad von x folgendes gilt. In (10.) sei alles auf denselben Nenner gebracht;

$$(11.)\qquad p_\alpha=\frac{H_1(x)s^{\sigma-1}+H_1(x)s^{\sigma-2}+\cdots+H_\sigma(x)}{K(x)},$$

wobei gemeinsame Faktoren in x in Zähler und Nenner vorkommen dürfen.

Die algebraische Funktion s soll bei $x=\infty$ die Eigenschaft haben (s. die vorhergehende Arbeit), daß, wenn $x=t^{-1}$, $st^{l}=s'$ gesetzt wird, nach den Angaben in Abh. Bd. 123 Nr. 2 I, die σ endlichen Zweige von s' bei $t=0$ entweder untereinander verschieden sind oder die Beschaffenheit haben, wie die Zweige von s bei einem Punkte im Endlichen, in welchem der wesentliche Teiler der Diskriminante von s verschwindet. Dann folgt aus dem a. a. O. Nr. 2 I und II *C.* Gesagten für die Regularität von (1.) bei $x=\infty$ als notwendig und hinreichend, daß in (11.) der Grad von $H_\lambda(x)x^{l(\sigma-\lambda)}$ wenigstens um $\mathfrak{a}$ niedriger ist als der des Nenners $K(x)$. Aus dem a. a. O. II *C.* Gesagten folgt nämlich bei $x=t^{-1}$, daß, wenn in $\frac{p_\mathfrak{a}}{t^{2\mathfrak{a}}}$, $s=s't^{-l}$, die gemeinsame Potenz von t in Zähler und Nenner weggehoben ist, alsdann t höchstens in der Potenz $\mathfrak{a}$ im Nenner vorkommt.

Nun sei

$$(12.)\qquad p_\mathfrak{a}=\frac{(P_\mathfrak{a}(s,x)D(x))(\psi(x))^\mathfrak{a}+Q_\mathfrak{a}(s,x)(D(x))^{\mathfrak{a}+1}}{D(x)(D(x)\psi(x))^\mathfrak{a}}$$

und

$$(13.)\qquad \mu+(\mu+n)\mathfrak{a}-l(\sigma-\lambda)-\mathfrak{a}=k_\lambda$$

gesetzt. Wenn sich in $(P_\mathfrak{a}(s,x)D(x))(\psi(x))^\mathfrak{a}$, worin die $c_{\mathfrak{a}\varrho}$ noch unbestimmt sind, der Grad des Faktors von $s^{\sigma-\lambda}$, der höchstens $\mu-1+n\mathfrak{a}$ ist, größer als k_λ ergibt, so sind in dem Zähler in (12.) in dem Faktor von $s^{\sigma-\lambda}$ so viele Koeffizienten der Potenzen von x sukzessive gleich Null zu setzen, bis der Grad dieses Faktors gleich oder kleiner als k_λ wird (bei $k_\lambda<0$ verschwindet dieser Faktor). Das gibt, wenn $\mu(\mathfrak{a}+1)-1>k_\lambda$ ist, Bedingungsgleichungen unter den $c_{\mathfrak{a}\varrho}$ $(\varrho=1,\ldots\mu)$, in welchen dieselben linear und homogen auftreten. Kommt ein außerwesentlicher Teiler der Diskriminante nicht vor, so fällt in (10.) $P_\mathfrak{a}(s,x):(D(x))^\mathfrak{a}$ weg. Für den Fall, daß dieser Teiler vorkommt, ist ein Beispiel eines regulären Differentialausdrucks, worin der Ausdruck (8.) nicht verschwindet, in Abh. Bd. 123 Nr. 2 (11.) gegeben. Die algebraische Funktion $s=\sqrt{P(x)}$, wo $P(x)$ ein Polynom mit untereinander verschiedenen Linearfaktoren ist, stellt eine hier behandelte *Kronecker*sche algebraische Funktion vor, bei welcher die Diskriminante keinen außerwesentlichen Teiler hat.

2.

Zerlegung eines homogenen linearen Differentialausdruckes in ein System, dessen erster Bestandteil ein regulärer Differentialausdruck von allgemeinstem Typus ist.

Diese Untersuchung besteht in einer Verallgemeinerung des in Abh. Bd. 123 Nr. 7 gegebenen Verfahrens und wird hier in der Weise dargestellt, daß auf die a. a. O. gegebenen Nummern von Formeln durch Zusetzen von Strichen hingewiesen wird.

Die in den Koeffizienten des homogenen linearen Differentialausdruckes $F_m(y, s, x)$ von der Form Nr. 1 (1.) vorkommende ganze algebraische Funktion s ist also jetzt eine *Kronecker*sche, welche bei $x = \infty$ sich, wie in Nr. 1 nach (11.) angegeben ist, verhält. Für die Zerlegung von $F_m(y, s, x)$ in das System

$$(1'.) \qquad F_{m-k}(y, s, x) = y', f_k(y', s, x)$$

soll nun hier vorausgesetzt werden, daß der im Bereiche von s reguläre Differentialausdruck $F_{m-k}(y, s, x)$ dem allgemeinsten Typus angehört, wie derselbe in Nr. 1 angegeben ist.

Zu a. a. O. I A): $F_m(y, s, x)$ habe im Endlichen $\varkappa$ singuläre Punkte. Dies sind die Punkte, in denen die Diskriminante von s verschwindet, außerdem möglicherweise noch andere Punkte. $D(x)$ Nr. 1 (3.) ist das Polynom, dessen Quadrat der außerwesentliche Teiler der Diskriminante ist. $D_1(x)$ sei das Polynom von x mit dem Koeffizienten der höchsten Potenz gleich 1 des wesentlichen Teilers der Diskriminante. $D_2(x)$ sei das Polynom von x mit dem Koeffizienten der höchsten Potenz gleich 1 und untereinander verschiedenen Linearfaktoren, welches in den anderen Punkten verschwindet, in welchen die rationalen Ausdrücke in x in den Koeffizienten von $F_m(y, s, x)$ unendlich werden. Kommt eines dieser Polynome nicht vor, so ist das betreffende D gleich 1 zu setzen. Dann sei

$$(1.) \qquad \begin{cases} D(x)\, D_1(x)\, D_2(x) = \varphi(x), \\ \varphi(x) = (x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_\varkappa) \end{cases}$$

gesetzt. $F_{m-k}(y, s, x)$ habe im Endlichen noch $\varkappa'$ ($\varkappa' \geqq 0$) singuläre Punkte $a_{\varkappa+1}$ bis $a_{\varkappa+\varkappa'}$, in denen die Diskriminante von s nicht verschwindet, und welche in $F_m(y, s, x)$ nicht vorkommen, und es sei das Produkt

$$(2.)\qquad (x-a_{\varkappa+1})(x-a_{\varkappa+2})\cdots(x-a_{\varkappa+\varkappa'})=\chi(x)$$

gesetzt (bei $\varkappa'=0, \chi(x)=1$), dann sei

$$(3.)\qquad \psi(x)=\varphi(x)\chi(x).$$

Der Koeffizient von $\frac{d^{m-k-\alpha}y}{dx^{m-k-\alpha}}$ in $F_{m-k}(y,s,x)$ werde durch $p_\alpha^{(k)}$ bezeichnet. Nach Nr. 1 (8.), (9.), (10.) hat $p_1^{(k)}$ die Form

$$(4.)\qquad p_1^{(k)}=\frac{P_1(s,x)}{D(x)}+\frac{Q_1(s,x)}{\psi(x)}.$$

Zunächst wird $P_1(s,x)$ bestimmt. b_ϱ sei ein Punkt aus Nr. 1 (3.),

$$(5.)\qquad \begin{cases} D(x)=(x-b_\varrho)\overline{D}_\varrho(x), \\ \psi(x)=(x-b_\varrho)\overline{\psi}_\varrho(x). \end{cases}$$

Dann erfolgt aus (4.)

$$(6.)\qquad (x-b_\varrho)\,p_1^{(k)}=\frac{P_1(s,x)}{\overline{D}_\varrho(x)}+\frac{Q_1(s,x)}{\overline{\psi}_\varrho(x)}.$$

Hieraus ergibt sich, da $(s_{\sigma-1})_{x=b_\varrho}=(s_\sigma)_{x=b_\varrho}$ ist,

$$(7.)\qquad [(x-b_\varrho)p_1^{(k)}(s_{\sigma-1},x)]_{x=b_\varrho}-[(x-b_\varrho)p_1^{(k)}(s_\sigma,x)]_{x=b_\varrho}=$$

$$\frac{c_{1\varrho}}{\overline{D}_\varrho(b_\varrho)}\left(\frac{df_\varrho(s)}{ds}\right)_{s=s_{\varrho,\sigma-1}}\left\{\frac{ds_{\sigma-1}}{dx}-\frac{ds_\sigma}{dx}\right\}_{x=b_\varrho}.$$

Es wird die formelle Entwicklung von $p_1^{(k)}(s_{\sigma-1},x)$ und $p_1^{(k)}(s_\sigma,x)$ bei $x=b_\varrho$ aufgestellt, wie a. a. O. bei (15.) angegeben ist, und durch (7.) $c_{1\varrho}$ bestimmt. Dies sei für $\varrho=1$ bis μ vollzogen und damit $P_1(s,x)$ ermittelt. Nun ist

$$(2'.)\qquad \frac{P_1(s,x)\psi(x)+Q_1(s,x)D(x)}{D(x)\psi(x)}=\sum_{\alpha=1}^{\alpha=\varkappa+\varkappa'}\frac{A_1(x)s^{\sigma-1}+A_2(x)s^{\sigma-2}+\cdots+A_\sigma(x)}{D(x)\psi(x)}.$$

Gemäß dem in Nr. 1 nach (11.) Gesagten ergibt sich, wenn der Koeffizient von $s^{\sigma-\lambda}$ in $f_\varrho(s)$ durch $k_{\varrho,\sigma-\lambda}$ bezeichnet wird,

$$\frac{A_\lambda(x)}{D(x)\,\psi(x)} = \sum_{\mathfrak{a}=1}^{\mathfrak{a}=\varkappa+\varkappa'} \frac{\alpha_{\mathfrak{a}\lambda}}{x-a_{\mathfrak{a}}} + \sum_1^\mu{}_\varrho \frac{c_{1\varrho}}{\overline{D}_\varrho(b_\varrho)} \frac{k_{\varrho,\sigma-\lambda}}{(x-b_\varrho)^2}. \tag{3.'}$$

Nun sind die möglichen Werte der Konstanten $\alpha_{\mathfrak{a}\lambda}$ bei den singulären Punkten $a_{\mathfrak{a}}$ $(\mathfrak{a}=1,\dots\varkappa)$ von $F_m(y,s,x)$ zu ermitteln. Bei einem Punkte $a_{\mathfrak{a}}$, in welchem $D_2(x)$ verschwindet, geschieht die Bestimmung von $\alpha_{\mathfrak{a}\lambda}$, wie a. a. O. I Aa) angegeben ist, bei einem Punkte $a_{\mathfrak{a}}$, in welchem $D_1(x)$ gleich Null ist, nach den Angaben a. a. O. I Abα). Es ist nun der Fall zu behandeln, daß $a_{\mathfrak{a}}$ ein Punkt ist, in dem $D(x)$ verschwindet, $a_{\mathfrak{a}}=b_\varrho$. Das Verfahren entspricht dem von I Abβ) a. a. O. Aus (4.), (2'.) und (3'.) folgt

$$\begin{aligned}(x-b_\varrho)\,p_1^{(k)}(s,x) &= \alpha_{\mathfrak{a}1}s^{\sigma-1}+\alpha_{\mathfrak{a}2}s^{\sigma-2}+\cdots+\alpha_{\mathfrak{a}\sigma}\\ &+(x-b_\varrho)\,L(s,x-b_\varrho)+\frac{c_{1\varrho}}{\overline{D}_\varrho(b_\varrho)}\frac{f_\varrho(s)}{x-b_\varrho}.\end{aligned} \tag{8'.}$$

Hier wird $s=s_1$ bis $s_{\sigma-1}$ gesetzt, dann $x=b_\varrho$. Daraus gehen entsprechend dem a. a. O. bei (15.) Gesagten $\sigma-1$ Gleichungen hervor. Die σ-te Gleichung erfolgt gleichfalls nach dem a. a. O. Bemerkten, wenn dort in (15.) rechts hinzuaddiert wird

$$\frac{c_{1\varrho}}{\overline{D}_\varrho(b_\varrho)}\left\{\frac{d}{dx}\frac{f_\varrho(s_{\sigma-1})}{x-b}-\frac{d}{dx}\frac{f_\varrho(s_\sigma)}{x-b_\varrho}\right\}_{x=b_\varrho}. \tag{15'.}$$

Aus diesen σ linearen Gleichungen werden die Konstanten $\alpha_{\mathfrak{a}1}$ bis $\alpha_{\mathfrak{a}\sigma}$ bestimmt.

Zu a. a. O. I B): Es ist nun eine Gleichung in x zu ermitteln, deren Wurzeln die in $F_{m-k}(y,s,x)$ neu hinzutretenden singulären Punkte $a_{\varkappa+1}$ bis $a_{\varkappa+\varkappa'}$ sind. Dazu ist, a. a. O. (20.),

$$\sum_1^\sigma{}_\lambda\, p_1^{(k)}(s_\lambda,x) \tag{20'.}$$

zu betrachten. In der Formel a. a. O. (20.) ist gemäß (4.), (2'.), (3'.) rechts zuzuaddieren:

$$(20''.)\qquad \sum_1^{\sigma}{}_{\lambda}\sum_1^{\mu}{}_{\varrho}\frac{c_{1\varrho}f_{\varrho}(s_\lambda)}{\overline{D}_{\varrho}(b_{\varrho})(x-b_{\varrho})^2}.$$

Dies ist eine rationale Funktion von x. Dieselbe wird in den ganzen und echt gebrochenen Teil zerlegt. Alsdann ist der echt gebrochene Teil mit x multipliziert in der Formel a. a. O. (23.) links zu subtrahieren. Das Weitere in a. a. O. I Bb) und c) bleibt unverändert.

Zu a. a. O. I C): Die vollständige Bestimmung von

$$p_{\mathfrak{a}}^{(k)}(s,x),\ (\mathfrak{a}=1,\dots m-k).$$

Es ist gemäß Nr. 1 (10.) und Nr. 2 (3.)

$$(8.)\qquad p_{\mathfrak{a}}^{(k)}(s,x)=\frac{P_{\mathfrak{a}}(s,x)}{(D(x))^{\mathfrak{a}}}+\frac{Q_{\mathfrak{a}}(s,x)}{(\psi(x))^{\mathfrak{a}}},$$

woraus

$$(9.)\qquad p_{\mathfrak{a}}^{(k)}(s,x)=\frac{(P_{\mathfrak{a}}(s,x)\,D(x))\,(D_1(x)\,D_2(x)\,\chi(x))^{\mathfrak{a}}+Q_{\mathfrak{a}}(s,x)\,D(x)}{D(x)\,(\psi(x))^{\mathfrak{a}}}.$$

Dadurch wird

$$(10.)\begin{cases}p_{\mathfrak{a}}^{(k)}(s,x)\,D(x)\,(\psi(x))^{\mathfrak{a}}=L_{\mathfrak{a}}(s,x),\\ L_{\mathfrak{a}}(s,x)=(P_{\mathfrak{a}}(s,x)\,D(x))\,(D_1(x)\,D_2(x)\chi(x))^{\mathfrak{a}}+Q_{\mathfrak{a}}(s,x)\,D(x).\end{cases}$$

Es werde

$$(30'.)\qquad L_{\mathfrak{a}}(s,x)=A_{\mathfrak{a}1}(x)s^{\sigma-1}+A_{\mathfrak{a}2}(x)s^{\sigma-2}+\cdots+A_{\mathfrak{a}\sigma}(x)$$

gesetzt. Der höchste zulässige Grad von x in $A_{\mathfrak{a}\lambda}(x)$ ist nach dem in Nr. 1 nach (11.) Bemerkten: $\mu+(\varkappa+\varkappa')\mathfrak{a}-l(\sigma-\lambda)-\mathfrak{a}$. Nun erhält $L_{\mathfrak{a}}(s,x)$ bei dem a. a. O. I C) genannten Punkte $x=A$ die Form

$$(31'.)\qquad k_0(s)+k_1(s)(x-A)+\cdots+k_{\nu}(s)(x-A)^{\nu},$$

wo die k Polynome von s höchstens $(\sigma-1)$-ten Grades mit zu bestimmenden konstanten Koeffizienten sind, der höchste zulässige Grad ν bekannt ist.

Die Bestimmung der $k(s)$ geschieht, wie a. a. O. I C a) und b) angegeben ist. Nachdem die Entwicklung (31'.) ermittelt ist, wird dieselbe auf die Form (30'.) gebracht. Dann ist zu prüfen, ob die angegebene Bedingung für den Grad in $A_{\alpha\lambda}(x)$ erfüllt ist (a. a. O. I C c.)).

Jetzt ist aber hier noch zuzusehen, ob der ermittelte in s und x rationale Ausdruck für $p_{\alpha}^{(k)}(s,x)$ in den Punkten, in denen $D(x)=0$ ist, höchstens in α-ter Ordnung unendlich wird, also nach Nr. 1, ob $p_{\alpha}^{(k)}(s,x)$ auf die Form Nr. 1 (10.) gebracht werden kann.

In $L_{\alpha}(s,x)$ (30'.) wird $x=b_{\varrho}$ gesetzt, dann muß sich gemäß (10.) ergeben

$$(11.)\qquad L_{\alpha}(s,b_{\varrho})=c_{\alpha\varrho}f_{\varrho}(s)\bar{D}_{\varrho}(b_{\varrho})(D_1(b)D_2(b)\chi(b))^{\alpha}.$$

Diese Bedingung, aus welcher $c_{\alpha\varrho}$ hervorgeht, muß für $\varrho=1,\dots\mu$ erfüllt sein. Dann verschwindet

$$(12.)\qquad L_{\alpha}(s,x)-(P_{\alpha}(s,x)D(x))(D_1(x)D_2(x)\chi(x))^{\alpha}$$

für $x=b_{\varrho}(\varrho=1,\dots\mu)$ und wird demnach gleich $D(x)Q_{\alpha}(s,x)$.

Damit ist dann der ermittelte Differentialausdruck $F_{m-k}(y,s,x)$ als regulärer nachgewiesen. Es ist nun zuzusehen, ob das zwischen den Koeffizienten von $F_m(y,s,x)$, $F_{m-k}(y,s,x)$ und $f_k(y',s,x)$ in (1'.) bestehende Gleichungssystem erfüllt ist (vergl. a. a. O. I C c.)).

3.

Bemerkung über Zerlegung und Integration einer linearen Differentialgleichung.

Die in Nr. 2 dargestellte Zerlegung schließt an die Untersuchung in Abh. Bd. 123 Nr. 7 an. Nun kommt für die weitere Zerlegung und Integration der vorgelegten Differentialgleichung das in Nr. 8 und 9 derselben Abhandlung Gesagte in Betracht. Bei den a. a. O. Nr. 8 I gemachten Untersuchungen treten jetzt die Begriffe: kanonische Bestandteile und Hauptunterdifferentialgleichungen ganz so auf, wie wenn die Koeffizienten der Differentialgleichung rationale Funktionen sind (Abh. Bd. 96 Nr. 10, 11.). Nr. 8 II a. a. O. wird nun bedeutungslos, abgesehen von dem Schluß, der sich auf die Konnexdifferentialgleichung (vergl. Abh. Bd. 122 S. 27) bezieht.

Die Integration der vorgelegten Differentialgleichung geschieht nach den Angaben in Abh. Bd. 123 Nr. 9.

Was die Konnexdifferentialgleichung betrifft, so wird dieselbe nach Abh. Bd. 115 Nr. 8 in Verbindung mit Abh. Bd. 119 Nr. 2 hergeleitet. Dabei werden während der Herleitung die einzelnen Zweige der vorkommenden algebraischen Funktionen durch die in Bd. 119 Nr. 2 angegebene algebraische Funktion S aus der irreduktiblen Gleichung $\Phi(S) = 0$ ausgedrückt, wodurch ohne weiteres beurteilt werden kann, ob ein ganzer rationaler Ausdruck dieser Zweige mit rationalen Funktionen von x als Koeffizienten verschwindet. Die Konnexdifferentialgleichung findet Anwendung bei einer regulären Differentialgleichung nach Abh. Bd. 115 Nr. 6 I S. 124, IV S. 133. Bei anderen Differentialgleichungen nach Abh. Bd. 115 Nr. 9, Bd. 121, Bd. 123 Nr. 9.

Wenn bei der linearen Differentialgleichung $F_m(y, s, x) = 0$, worin die ganze algebraische Funktion s beliebig ist, untersucht werden soll, ob der Differentialausdruck der Konnexdifferentialgleichung durch ein System normaler Differentialausdrücke (die also in den determinierenden Faktoren s nicht enthalten sind) sich darstellen läßt, so ist zunächst bei der vorgelegten Differentialgleichung $F_m(y, s, x) = 0$ die in Abh. Bd. 122 Nr. 1 VIa.) angegebene Prüfung vorzunehmen und bei der Konnexdifferentialgleichung selbst die Prüfung nach a. a. O. VI b. —

Wenn man ein System $F_m(y, s, x)$ verallgemeinerter im Bereiche einer algebraischen Funktion s normaler Differentialausdrücke aufstellt (mit einem oder mehreren Bestandteilen, vergl. Abh. Bd. 123 Nr. 3), in denen die determinierenden Faktoren s tatsächlich enthalten sind, so ist der Differentialausdruck der Konnexdifferentialgleichung von $F_m(y, s, x) = 0$ nicht durch ein System normaler Differentialausdrücke (deren determinierende Faktoren nur x, nicht s enthalten) darstellbar (Abh. Bd. 122 Nr. 1 IV, 123 S. 84).

Bei einem singulären Punkte $x=a$ von $F_m=0$, bei welchem die Zweige von s alle einwertig sind, geht $F_m(y, s, x)$ bei jedem Zweige in ein System bei $x=a$ normaler Differentialausdrücke über (Abh. Bd. 123 Nr. 9 S. 123). Daraus folgt nach Abh. Bd. 121 Nr. 5, daß der Differentialausdruck der Konnexdifferentialgleichung durch ein System bei $x=a$ normaler Elementardifferentialausdrücke darstellbar ist.

Dieser Differentialausdruck mit rationalen Koeffizienten hat also bei $x=a$ die genannte Eigenschaft, während derselbe sich nicht durch ein System normaler Differentialausdrücke darstellen läßt.

4.

Bemerkung über simultane lineare Differentialgleichungen.

Bei simultanen linearen Differentialgleichungen, die rational neben der unabhängigen Variablen eine algebraische Funktion in den Koeffizienten enthalten und sich nicht als reguläre ergeben, kann an Stelle der algebraischen Funktion zunächst eine *Kronecker*sche algebraische Funktion eingeführt werden.

In betreff des konstanten Faktors in dem Ausdruck der Determinante eines Fundamentalsystems Abh. Bd. 131 Nr. 4 (2.), Bd. 133 Nr. 2 (2.) (vergl. Abh. Bd. 96 Nr. 21) ist zu bemerken, daß bei regulären Differentialgleichungen dieser konstante Faktor direkt aus der Entwicklung der Determinante entnommen wird. Ebenso geschieht es bei simultanen linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten.

Für simultane lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten ist das durch die Abhandlungen Bd. 131, 133 zur Integration simultaner linearer Differentialgleichungen gegebene Verfahren ein *direktes* Integrationsverfahren.

Über die Bahnkurven der Mechanik.

Von Herrn *Philipp Frank* in Wien.

Die Gesamtheit aller Bahnen, die ein materieller Punkt unter dem Einfluß gegebener konservativer Kräfte durchlaufen kann, und denen derselbe Energiewert entspricht, wollen wir ein *isenergetisches* Bahnkurvensystem nennen. Jede aus einem solchen System herausgegriffene Schar heiße eine isenergetische Schar. Derartige Systeme sind für viele Fragen der Mechanik, insbesondere für die Untersuchung der kinetischen Stabilität gegenüber konservativen Störungen, von Bedeutung.

Wir wollen uns auf die Ebene beschränken, wo jedes isenergetische System eine zweiparametrige Kurvenschar ist.

Wenn wir uns in diesem einfachsten Fall einen Überblick über die möglichen Stabilitätsverhältnisse verschaffen wollen, drängt sich uns sofort die Frage auf, unter welchen Bedingungen eine gegebene zweiparametrige Kurvenschar als isenergetisches Bahnkurvensystem aufgefaßt werden kann, und welche Kräfte zur Erzeugung dieses Systems nötig sind. Mit der Beantwortung dieser Frage wollen wir uns zunächst beschäftigen, wobei wir der Einfachheit halber den Energiewert unseres Systems als Null annehmen, wodurch die Allgemeinheit nicht beschränkt wird.

Wir gehen von der *Jacobi*schen Form des Prinzips der kleinsten Wirkung aus, das in unserer Terminologie besagt: Das isenergetische Bahnkurvensystem, das der potentiellen Energie $V(x, y)$ entspricht, wird von den Extremalen des Integrals

$$(1.) \qquad \int \sqrt{-V(x,y)}\,\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

gebildet. Sei nun eine beliebige zweiparametrige Kurvenschar, die durch eine Differentialgleichung zweiter Ordnung bestimmt ist,

$$(2.)\qquad y'' = \varphi(x, y, y')$$

gegeben, so ist die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die Schar als isenergetisches Bahnkurvensystem aufgefaßt werden kann, die, daß sie sich als Extremalenschar eines Integrals von der Form (1.) darstellen läßt.

Allgemein lautet die hinreichende und notwendige Bedingung dafür, daß die Schar (2.) die Extremalenschar eines Integrals

$$\int F(x, y, y')\,dx$$

ist, folgendermaßen*):

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}\varphi(x, y, y') + \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} y' + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y'} - \frac{\partial F}{\partial y} = 0\,.$$

In unserem Falle ist

$$F(x, y, y') = \sqrt{-V}\sqrt{1 + y'^2}$$

und, wenn wir der Kürze halber

$$(3.)\qquad \sqrt{-V} = f(x, y)$$

setzen,

$$F(x, y, y') = f(x, y)\sqrt{1 + y'^2}.$$

Es muß also $f(x, y)$ der Differentialgleichung

$$(4.)\qquad \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}\left(\frac{f\varphi}{1+y'^2} + y'\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right) = 0$$

genügen. Im allgemeinen wird eine Lösung dieser Gleichung Funktion von x, y, y' sein, da die Koefffzienten diese drei Variablen enthalten. Wir wollen die allgemeinste Lösung aufsuchen, die von y' unabhängig ist. Zu diesem

*) *Darboux*, Théorie des surfaces Bd. III. art. 604, 605.

Zwecke differenzieren wir Gleichung (4.) nach y', wodurch sicher keine Lösung verloren geht, und erhalten:

$$f\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y'} - \frac{3\varphi y'}{1+y'^2}\right) + \frac{\partial f}{\partial x} + y'\frac{\partial f}{\partial y} = 0. \tag{5.}$$

Wir wollen nun über φ die Voraussetzung machen, daß der Ausdruck

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y'} - \frac{3\varphi y'}{1+y'^2} \tag{6.}$$

die Variable y' nur linear enthält und mit dx multipliziert einen vollständigen Differentialausdruck bildet, daß man also durch Quadratur eine Funktion $\psi(x,y)$ finden kann, für die

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y'} - \frac{3\varphi y'}{1+y'^2} = \frac{\partial \psi}{\partial x} + y'\frac{\partial \psi}{\partial y} \tag{6a}$$

gilt. Diese Voraussetzung, die zunächst als willkürlich erscheint, wird sich später als notwendig erweisen. Es verwandelt sich durch Einsetzen von (6a) die Gleichung (5.) in

$$\frac{\partial}{\partial x}(\ln f + \psi) + y'\frac{\partial}{\partial y}(\ln f + \psi) = 0. \tag{5a}$$

Es ist also $f(x,y) = Ce^{-\psi(x,y)}$, wo C eine willkürliche Konstante ist, eine Lösung der Gleichung (5.) von der gewünschten Eigenschaft. Man sieht auch sofort, daß es die allgemeinste ist. Denn wären f_1 und f_2 Lösungen von (5.), die nur x und y enthalten, so folgt aus (5a).

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\ln\frac{f_1}{f_2}\right) + y'\frac{\partial}{\partial y}\left(\ln\frac{f_1}{f_2}\right) = 0.$$

Da diese Gleichung identisch in y' erfüllt ist, so folgt daraus, daß $\ln\frac{f_1}{f_2}$ konstant ist, die beiden Lösungen sich also nur um einen konstanten Faktor unterscheiden.

$$(7.)\qquad f(x,y)=Ce^{-\psi(x,y)}$$

ist also unter der Voraussetzung (6ª) die allgemeinste Lösung von (5.), die nur x und y enthält.

Es erübrigt noch zu zeigen, daß der Ausdruck (7.) auch eine Lösung von Gleichung (4.) ist. Da er der nach y' differenzierten Gleichung genügt, muß nur bewiesen werden, daß Gleichung (4.) beim Einsetzen von (7.) für einen speziellen Wert von y' erfüllt ist. Wir sehen, um für φ eine Eigenschaft ableiten zu können, in Gleichung (6ª) x und y als konstant und φ als reine Funktion von y' an; Gleichung (6ª) ist dann eine gewöhnliche lineare Differentialgleichung erster Ordnung, deren auf elementarem Wege mögliche Integration die Art der Abhängigkeit des φ von y' zeigt. Und zwar finden wir

$$\frac{\partial^4\varphi}{\partial y'^4}\equiv 0.$$

Es läßt sich also φ jedenfalls in der Form schreiben:

$$\varphi(x,y,y')=(\varphi)_0+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y'}\right)_0 y'+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial y'^2}\right)_0 y'^2+\frac{1}{6}\left(\frac{\partial^3\varphi}{\partial y'^3}\right)_0 y'^3,$$

wenn wir allgemein $[\chi(x,y,y')]_{y'=0}=(\chi)_0$ setzen. Analog finden wir

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y'}=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y'}\right)_0+\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial y'^2}\right)_0 y'+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^3\varphi}{\partial y'^3}\right)_0 y'^2.$$

Wenn wir diese Ausdrücke für φ und $\frac{\partial\varphi}{\partial y'}$ in Gleichung (6ª) einsetzen, erhalten wir eine identische Gleichung in y' und durch Gleichsetzen der Koeffizienten gleicher Potenzen von y' auf beiden Seiten folgt:

$$(8.)\qquad \begin{aligned}\frac{\partial\psi}{\partial x}&=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y'}\right)_0=\frac{1}{6}\left(\frac{\partial^3\varphi}{\partial y'^3}\right)_0,\\ \frac{\partial\psi}{\partial y}&=-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial y'^2}\right)_0=-(\varphi)_0.\end{aligned}$$

Setzen wir nun (7.) in Gleichung (4.) ein, so erhalten wir

$$\frac{Ce^{-\psi}}{\sqrt{1+y'^2}}\left[\frac{\varphi}{\sqrt{1+y'^2}}-y'\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial y}\right]=0;$$

für $y'=0$ ist aber diese Gleichung offenbar mit Berücksichtigung der Relationen (8.) erfüllt. Folglich ist (7.) auch Lösung von Gleichung (4.).

Wir wollen nun noch nachweisen, daß die Voraussetzung (6ª.) notwendig ist. Wenn wir nämlich voraussetzen, daß durch (2.) ein isenergetisches Bahnkurvensystem gegeben ist, so muß es sicher eine solche Funktion $f(x,y)$ geben, daß (2.) die Extremalen von

$$\int f(x,y)\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

darstellt. Wir denken uns nun die zu diesem Integral gehörige *Euler-Lagrange*sche Differentialgleichung gebildet und aus ihr y'' durch x, y, y' ausgedrückt. Die notwendige Bedingung dafür, daß (2.) die Extremalen darstellt, erhalten wir dann, wenn wir $\varphi(x,y,y')$ der auf die angegebene Art berechneten Funktion von x, y, y' gleichsetzen. Sie lautet also:

$$\varphi(x,y,y')=\left(\frac{\partial\log f}{\partial y}-y'\frac{\partial\log f}{\partial x}\right)(1+y'^2);$$

daraus folgt durch Differenzieren:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y'}-\frac{3\varphi y'}{1+y'^2}=-\left(\frac{\partial\log f}{\partial x}+y'\frac{\partial\log f}{\partial y}\right),$$

d. h. $\varphi(x,y,y')$ muß der Voraussetzung (6ª.) genügen.

Indem wir alles Gesagte zusammenfassen, gelangen wir schließlich zu folgender Formulierung:

Satz I. Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß eine gegebene zweiparametrige Kurvenschar $y''=\varphi(x,y,y')$ als ein isenergetisches Bahnkurvensystem aufgefaßt werden kann, besteht darin, daß

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y'}-\frac{3\varphi y'}{1+y'^2}\right)dx$$

ein linearer homogener vollständiger Differentialausdruck ist. Die zur gegebenen Schar gehörende Kräftefunktion ist dann bis auf einen konstanten Faktor eindeutig bestimmt, läßt sich durch bloße Quadratur finden und lautet:

$$-V(x,y) = Ce^{-2\int\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y'} - \frac{3\varphi y'}{1+y'^2}\right)dx} = Ce^{2\int\varphi(x,y,0)\,dy} = Ce^{-2\int\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y'}\right)_{y'=0}dx}.$$

Aus diesem Satz lassen sich viele Konsequenzen ziehen; so folgt leicht: Unter allen Kurvenscharen, die durch lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung definiert sind, gibt es eine einzige, die sich als isenergetisches Bahnkurvensystem auffassen läßt; nämlich die Schar aller Geraden der Ebene $y'' = 0$, der die Kräftefunktion $-V(x,y) = C$ entspricht.

Für das Studium der kinetischen Stabilität ist aber auch die Frage von Wichtigkeit, unter welchen Umständen eine gegebene einparametrige Kurvenschar

$$y' = p(x,y) \tag{9.}$$

als isenergetische Schar betrachtet werden kann und wie die zugehörige Kräftefunktion lautet. Ein ähnliches Problem wurde von *Dainelli) behandelt, und wir wollen zunächst dessen Weg gehen. *Dainelli* fand nämlich den allgemeinsten Ausdruck für die Komponenten (X, Y) des Kraftfeldes, das eine gegebene einparametrige Kurvenschar zu Bahnkurven hat. Dabei wird aber weder gefordert, daß die Schar eine isenergetische wird, noch daß das Kraftfeld ein Potential besitzt. Die Ausdrücke *Dainelli*s für das Kraftfeld, das zur Schar (9.) gehört, sind:**

$$X = \frac{1}{2}\frac{dv^2}{ds}\frac{1}{\sqrt{1+p^2}} - \frac{v^2}{\varrho}\frac{p}{\sqrt{1+p^2}},$$
$$Y = \frac{1}{2}\frac{dv^2}{ds}\frac{p}{\sqrt{1+p^2}} + \frac{v^2}{\varrho}\frac{1}{\sqrt{1+p^2}},$$

wo v die Geschwindigkeit, ds das Bogenelement und ϱ den Krümmungsradius der Bahn bedeutet. Die genannten Formeln ergeben sich übrigens unmittelbar aus der Zerlegung der Beschleunigung in eine Tangential- und eine

---

*) Giorn. di matem. d. Napoli (1881). S. auch *Whittaker*, Analytical dynamics §52.

Normalkomponente. Nach der Bedeutung der vorkommenden Buchstaben ist offenbar

$$\frac{d}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1+p^2}}\left(\frac{\partial}{\partial x} + p\frac{\partial}{\partial y}\right),$$

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{\frac{\partial p}{\partial x} + p\frac{\partial p}{\partial y}}{\sqrt{(1+p^2)^3}}.$$

Von dem Probleme *Dainellis* kommen wir zu dem hier behandelten, indem wir setzen

$$X = -\frac{\partial V}{\partial x}, \qquad Y = -\frac{\partial V}{\partial y},$$

$$\frac{v^2}{2} + V(x, y) = 0$$

und mit Berücksichtigung von Gleichung (3.)

$$X = 2f\frac{\partial f}{\partial x}, \quad Y = 2f\frac{\partial f}{\partial y}, \quad v^2 = 2f^2.$$

Wenn wir das alles in die erste Gleichung *Dainellis* einsetzen, so erhalten wir schließlich für f die partielle Differentialgleichung:

$$\text{(10.)} \qquad \frac{f\left(\frac{\partial p}{\partial x} + p\frac{\partial p}{\partial y}\right)}{1+p^2} + p\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

Diese Gleichung können wir aber viel rascher erhalten, wenn wir wieder von der Identität jeder isenergetischen Schar mit einer Extremalenschar eines Variationsproblems von der Form (1.) ausgehen, was uns sofort zu Gleichung (4.) führt; nur haben wir jetzt in ihr

$$y' = p\,(x, y),$$

$$\varphi = \frac{\partial p}{dx} + p\frac{\partial p}{\partial y}$$

zu setzen. Diese Substitution führt direkt zu Gleichung (10.). Um das allgemeine Integral dieser Gleichung zu finden, gehen wir davon aus, daß sie folgendem System von gewöhnlichen Differentialgleichungen äquivalent ist:

$$\text{(11.)} \qquad \frac{dx}{p(x,y)} = -\frac{dy}{1} = -\frac{df(1+p^2)}{f\left(\frac{\partial p}{\partial x} + p\frac{\partial p}{\partial y}\right)}.$$

Wir haben zuerst die Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{p(x,y)}$$

zu integrieren. Ihr allgemeines Integral sei $\eta(x,y) = c$; es gibt uns die Schar der orthogonalen Trajektorien unserer gegebenen Schar (9.). Ist $y = \bar{\eta}(x,c)$ die Auflösung von $\eta(x,y) = c$ und bezeichnen wir das Resultat der Substitution $y = \bar{\eta}(x,c)$ in eine Funktion $p(x,y)$ mit $[p]$, so gibt das erste und dritte Glied von (11.) zusammengefaßt:

$$\text{(11}^{\text{a}}\text{.)} \qquad \frac{df}{f} + \frac{\left[\frac{\partial p}{\partial x} + p\frac{\partial p}{\partial y}\right]}{[p(1+p^2)]}\,dx = 0.$$

Setzen wir

$$\int \frac{\left[\frac{\partial p}{\partial x} + p\frac{\partial p}{\partial y}\right]}{[p(1+p^2)]}\,dx = \chi(x,c),$$

so lautet das allgemeine Integral von (11^{a}.)

$$\log f + \chi(x,c) + \chi_1(c) = c_1,$$

wo $\chi_1(c)$ eine willkürliche Funktion von c bedeutet. Setzen wir nun

$$\chi(x, \eta(x,y)) = \psi(x,y),$$

so lautet das allgemeine Integral von (11.) bzw. (10.):

$$\Phi(\eta(x,y),\ \log f + \psi(x,y) + \chi_1(\eta)) = \text{konst.},$$

wo Φ wieder eine willkürliche Funktion bedeutet. Durch Auflösung der letzten Gleichung finden wir schließlich die allgemeine Lösung von Gleichung (10.):

$$f = \Phi_1(\eta(x,y))\, e^{-\psi(x,y)},$$

wo Φ_1 eine willkürliche Funktion von η ist.

Wir können nun wieder alles über das Problem, zu einer vorgegebenen einparametrigen Kurvenschar als isenergetische Schar das zugehörige Kraftfeld zu finden, Gesagte, folgendermaßen zusammenfassen:

Satz II. Ist $y' = p(x,y)$ eine gegebene einparametrige Schar von Kurven, $y = \bar{\eta}(x,c)$ oder $\eta(x,y) = c$ die Schar ihrer orthogonalen Trajektorien, so ist stets

$$-V(x,y) = e^{-2\psi(x,y)}$$

eine Kräftefunktion, zu der die gegebene Schar als isenergetische Bahnkurvenschar gehört. Dabei ist:

$$\psi(x,y) = \int \frac{\frac{\partial p}{\partial x} + p\,\frac{\partial p}{\partial y}}{p(1+p^2)}\, dx,$$

wo die Integration in der Weise auszuführen ist, daß in der Funktion von x und y im Integranden die Substitution $y = \bar{\eta}(x,c)$ gemacht wird, dann die Quadratur nach x ausgeführt und in der so entstehenden Funktion von x und c wieder $c = \eta(x,y)$ gesetzt wird.

Aus der genannten speziellen Kräftefunktion erhalten wir die allgemeinste zur gegebenen Schar gehörende durch Multiplikation mit einer willkürlichen Funktion von $\eta(x,y)$.

Als Korollar dieses Satzes ergibt sich: Wenn man das zu einem Potential $V(x,y)$ gehörige isenergetische Bahnkurvensystem kennt und eine beliebige einparametrige Kurvenschar aus ihm herausgreift, so gehört dieselbe Schar zu jedem anderen Potential, das man erhält, wenn man $V(x,y)$ mit einer Funktion von x und y multipliziert, die längs jeder orthogonalen Trajektorie der herausgegriffenen Schar konstant bleibt.

Zum Schluß möchte ich noch eine Anwendung des Satzes II auf eine Frage aus der Theorie der kinetischen Stabilität machen.

In meiner Arbeit „Über ein Kriterium für die Stabilität der Bewegung eines materiellen Punktes in der Ebene"*) habe ich es als zweifelhaft bezeichnet, ob es Bewegungen eines materiellen Punktes in der Ebene unter dem Einfluß konservativer Kräfte gibt, die zwar absolut stabil, aber nicht oszillatorisch stabil in dem dort definierten Sinne sind. Wäre nun die einparametrige Kurvenschar

$$y = c x e^{-x}$$

$$\text{oder } \frac{dy}{dx} = \frac{y(1-x)}{x}$$

eine isenergetische Schar eines mechanischen Problems, so wäre die ihr angehörende Bahnkurve $y=0$ offenbar absolut stabil; denn wenn ich durch die Geraden $y=+\delta$ und $y=-\delta$ einen Parallelstreifen von der Breite 2δ um $y=0$ abgrenze, so kann ich eine Zahl ε so angeben, daß alle Kurven, für die $|c|<\varepsilon$ ist, innerhalb des gegebenen Streifens verlaufen. Ich brauche zu diesem Zwecke nur $\varepsilon < e\delta$ anzunehmen. Die Kurven, für die $c \neq 0$ ist, sind aber die durch konservative Störung aus $y=0$ entstandenen.

Es ist ferner klar, daß $y=0$ von keiner der Nachbarkurven geschnitten wird; die Kurve $y=0$ ist also sicher nicht oszillatorisch stabil. Nun gestattet aber Satz II ein mechanisches Problem anzugeben, zu dem unsere betrachtete Kurvenschar als isenergetische Schar gehört.

Folglich gibt es sicher Bewegungen eines materiellen Punktes in der Ebene, die wohl absolut stabil, aber nicht oszillatorisch stabil sind.

---

*) Monatsh. f. Math. u. Phys. Bd. 20.

Kurvenscharen in einer Ebene.

Von Herrn *Heinrich W. E. Jung* in Marburg a. d. Lahn.

Einleitung.

Kurvenscharen in einer Ebene sind schon öfters behandelt, aber soviel ich weiß, immer nur unter der Annahme, daß die Singularitäten, die den Kurven an gegebenen Punkten (den sog. Grundpunkten) vorgeschrieben werden, von besonders einfacher Art sind.

Im folgenden möchte ich das Problem rein analytisch formulieren und behandeln, und zwar unter der allgemeinsten Annahme. Das Verfahren ist so, daß die Aufgabe zurückgeführt wird auf eine Aufgabe aus der Theorie der algebraischen Funktionen einer Veränderlichen. Die Möglichkeit beruht auf den Entwicklungen des § 7. Die Arbeit ist ausführlicher, als für den vorliegenden Zweck unbedingt nötig wäre; sie enthält noch eine Ausdehnung von Begriffen aus der Theorie der algebraischen Funktionen einer Veränderlichen auf Funktionen von zwei unabhängigen Veränderlichen für den einfachen Fall der rationalen Funktionen zweier Veränderlichen.

§ 1.

*Sätze aus der Theorie der algebraischen Funktionen einer Veränderlichen.**)

Es sei durch

$$F(x, y) = 0 \tag{1.}$$

*) Vgl. zu diesem Paragraphen *Hensel-Landsberg*, Theorie der algebraischen Funktionen einer Variablen (Leipzig, 1902); im folgenden zitiert mit H, L.

ein *algebraischer Körper* $\mathfrak{F}$ definiert: die Gleichung (1.) sei in x vom Grade l und in y vom Grade m. Für die Umgebung einer Stelle $x=a$ existiert eine endliche Anzahl von Entwicklungen der Form

$$(2.) \qquad y=b_1(x-a)^{\frac{\varepsilon_1}{\alpha}}+b_2(x-a)^{\frac{\varepsilon_2}{\alpha}}+\cdots,$$

wo die ε_i ganze Zahlen sind, und wo α eine positive ganze Zahl ist. Jeder solchen Entwicklung wird ein *Primteiler* $\mathfrak{p}$ zugeordnet,*) indem man definiert: Ersetzt man y in einer Funktion R aus $\mathfrak{F}$ durch die Entwicklung (2.) und ordnet nach Potenzen von $x-a$ und ergibt sich dann

$$R=(x-a)^{\frac{\lambda}{\alpha}}E(x-a),$$

wo E für $x=a$ weder Null noch unendlich wird, so sagt man, R ist teilbar durch $\mathfrak{p}^{\lambda}$.

Im allgemeinen ist in (2.) $\alpha=1$; nur für eine endliche Anzahl von Primteilern ist $\alpha>1$. Diese Primteiler heißen *Verzweigungsprimteiler.* Man nennt $\alpha-1$ die Ordnung des Verzweigungsprimteilers.

Jede Funktion aus $\mathfrak{F}$ läßt sich in einer und nur in einer Weise in Primfaktoren zerlegen. Ist ξ eine Funktion aus $\mathfrak{F}$, so bezeichnet man den Nenner von ξ mit $\mathfrak{n}_{\xi}$.

Das Produkt irgend welcher Primteiler nennt man einen *Divisor.* Die Summe aller Exponenten der in einem Divisor vorkommenden Primteiler nennt man die Ordnung des Divisors. Für einen Divisor, der einer Funktion des Körpers entspricht, ist die Ordnung immer Null. Ein Divisor heißt *ganz,* wenn alle Primteiler in ihm positive Exponenten haben.

Unter den Divisoren sind einige von besonderer Bedeutung.

1. Das Produkt aller Verzweigungsprimteiler, jeder in der Potenz genommen, die seine Ordnung angibt, heißt *Verzweigungsdivisor* und wird mit $\mathfrak{z}_x$ bezeichnet.**) Er hängt ab von der Wahl der unabhängigen Veränderlichen x.

---

*) *H, L.* S. 145.

**) *H, L.* S. 219.

2. Es ist

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\mathfrak{z}_x \mathfrak{d}}{\mathfrak{n}_x^l \mathfrak{n}_y^{m-2}}, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{\mathfrak{z}_y \mathfrak{d}}{\mathfrak{n}_x^{l-2} \mathfrak{n}_y^m}.$$

Der hierdurch definierte ganze Divisor $\mathfrak{d}$ heißt *Doppelpunktsdivisor*, weil er nur Null wird an den Stellen, wo die Kurve $F = 0$ mehrfache Punkte hat. Die Ordnung von $\mathfrak{d}$ ist immer gerade und wird mit $2d$ bezeichnet.*) Es gilt, wenn p das Geschlecht des Körpers bedeutet, die Gleichung

$$p = (l-1)(m-1) - d.$$

Über den Doppelpunktsdivisor gilt folgender wichtige Satz:**)

Ist R eine Funktion aus $\mathfrak{F}$ und ist, in Faktoren zerlegt,

$$R = \frac{\mathfrak{d}\,\mathfrak{g}}{\mathfrak{n}_x^\lambda \mathfrak{n}_y^\mu},$$

wo $\mathfrak{g}$ ein ganzer Divisor ist, so läßt sich R darstellen als ganze rationale Funktion von x, y. Ist im besonderen $\lambda \leqq l$, $\mu \leqq m$, so ist diese ganze rationale Funktion so wählbar, daß sie in x höchstens vom Grade λ und in y höchstens vom Grade μ ist. Für den Fall $\lambda < l$, $\mu < m$ ist dieser Satz, der auch eng mit dem *Noether*schen Satze zusammenhängt, z. B. bewiesen von *Hensel-Landsberg*, a. a. O., S. 410 fg. Aber bei dem Beweise ist nicht davon Gebrauch gemacht, daß $\lambda < l$. Nun kann man immer durch eine lineare homogene Transformation neue Veränderliche x', y' so einführen, daß $\mathfrak{n}_{x'} = \mathfrak{n}_{y'}$ wird. Es wird dann

$$R = \frac{\mathfrak{d}\,\mathfrak{g}'}{\mathfrak{n}_{x'}^\varrho},$$

wo $\mathfrak{G}'$ ein ganzer Divisor ist. Es wird also R als ganze Funktion von x', y' darstellbar und also auch als ganze rationale Funktion von x, y. Daß die Gradbestimmung für den Fall $\lambda \leqq l$, $\mu \leqq m$ richtig ist, sieht man auch leicht.

Man teilt alle Divisoren in Klassen ein, indem man zwei Divisoren dann und nur dann in dieselbe Klasse ordnet, wenn ihr Quotient einer

*) *H, L.* S. 382.
**) *H, L.* S. 410.

Funktion des Körpers entspricht. Jede Klasse ist durch einen ihrer Divisoren eindeutig bestimmt. Alle Divisoren einer Klasse haben dieselbe Ordnung, die dann die *Ordnung der Klasse* heißt. Man nennt eine Anzahl Divisoren einer Klasse linear unabhängig, wenn zwischen den Funktionen, die aus ihnen durch Division mit einem Divisor der Klasse entstehen, keine lineare Gleichung mit konstanten Koeffizienten besteht. Die Anzahl der in einer Klasse enthaltenen linear unabhängigen ganzen Divisoren heißt die *Dimension der Klasse*. Ist $\mathfrak{p}$ ein Divisor, so bezeichnet man seine Klasse mit $(\mathfrak{p})$ und die Dimension dieser Klasse mit $\{\mathfrak{p}\}$.

Sind Q, Q' zwei Klassen mit den Ordnungen q, q' und ist $\mathfrak{q}$ ein Divisor aus Q und $\mathfrak{q}'$ ein Divisor aus Q', so nennt man die Klasse des Divisors $\mathfrak{q}\mathfrak{q}'$ das Produkt der Klassen Q, Q', und die Klasse des Divisors $\frac{\mathfrak{q}}{\mathfrak{q}'}$ den Quotienten der Klassen Q, Q'. Diese Definition ist unabhängig von der Auswahl von $\mathfrak{q}$ in Q und $\mathfrak{q}'$ in Q'. Die Ordnung von QQ' ist $q + q'$, die von $\frac{Q}{Q'}$ ist $q - q'$.

Unter allen Klassen ist von besonderer Bedeutung die *Differenzialklasse*, die durch den Divisor

$$\frac{\mathfrak{z}_x}{\mathfrak{n}_x^2}$$

definiert und mit W bezeichnet wird. Diese Klasse ist nur scheinbar abhängig von x, da der Quotient $\frac{\mathfrak{z}_x}{\mathfrak{n}_x^2} : \frac{\mathfrak{z}_\xi}{\mathfrak{n}_\xi^2}$, wo ξ irgend eine Funktion des Körpers bedeutet, immer einer Funktion des Körpers entspricht, nämlich der Funktion $\frac{dx}{d\xi}$. Die Ordnung der Klasse W ist $2p - 2$, wenn mit p das Geschlecht des Körpers bezeichnet wird. Zwei Klassen Q, Q', die in der Beziehung

$$QQ' = W$$

zueinander stehen heißen *Ergänzungsklassen*. Für die Dimensionen dieser Klassen gilt *der Riemann-Rochsche Satz*,*) der sich in der Gleichung ausspricht:

---

*) *H, L.* S. 304.

$$|Q| = |Q'| + q - p + 1,$$

wo q die Ordnung von Q bedeutet.

§ 2.

Die rationalen Funktionen von x, y. Primteiler erster Stufe.

Es bedeute K den Körper aller rationalen Funktionen der zwei Veränderlichen x, y. Es sei ferner $A(x, y)$ eine ganze rationale unzerlegbare Funktion von x, y. Sie sei in x vom Grade λ und in y vom Grade μ. Wir drücken das in Zukunft kürzer so aus, daß wir sagen A ist vom Grade (λ, μ). Wir sagen, es ist $(\lambda, \mu) > (\lambda', \mu')$ wenn keine der Differenzen $\lambda - \lambda'$, $\mu - \mu'$ kleiner als Null ist und nicht beide gleich Null sind.

Wir ordnen A einen *Primteiler* $\mathfrak{A}$ zu, indem wir definieren: Eine rationale Funktion R ist durch $\mathfrak{A}^a$ teilbar, wenn sie bei der Zerlegung in unzerlegbare Faktoren den Faktor A^a enthält. Wir nennen (λ, μ) die *Ordnung des Primteilers* $\mathfrak{A}$. Ferner ordnen wir noch den Nullstellen der Funktionen $\frac{1}{x}, \frac{1}{y}$ Primfaktoren $\mathfrak{L}, \mathfrak{M}$ zu, indem wir z. B. die Teilbarkeit durch $\mathfrak{L}$ so definieren: Eine Funktion ist durch $\mathfrak{L}^a$ teilbar, wenn sie für unendliches x bei beliebigem y Null oder unendlich wird wie x^{-a}. Die so definierten Primteiler heißen *Primteiler erster Stufe*. Geometrisch entspricht einem solchen Primteiler eine algebraische Kurve in der xy-Ebene. Es gilt der Satz: *Jede Funktion aus K ist in eine endliche Anzahl von Primfaktoren zerlegbar und zwar im wesentlichen nur auf eine Art;* so ist z. B.

$$A = \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{L}^{\lambda} \mathfrak{M}^{\mu}}.$$

§ 3.

Die zugeordneten Funktionen.

Es sei a, b ein Wertsystem von x, y. Wir setzen $x - a = u$ und $y - b = v$. Dabei ist unter $x - a$, $y - b$, wie üblich $\frac{1}{x}, \frac{1}{y}$ zu verstehen, wenn a, b den Wert unendlich haben. Für kleine Werte von u, v bekommen wir die Umgebung der Stelle a, b. Es sei $\mathfrak{A}$ ein Primteiler und es sei A die ganze Funktion aus K, deren Zähler $\mathfrak{A}$ ist. Dann werde

$$A(x, y) = \frac{\bar{A}(u, v)}{u^\varrho v^\sigma},$$

wo ϱ und σ nur von 0 verschieden sind, wenn a oder b unendlich sind. Wir nennen $\bar{A}(u, v)$ die dem Primteiler $\mathfrak{A}$ für die Stelle a, b *zugeordnete Funktion**); ist $\bar{A}(0, 0) = 0$, so sagen wir, der Primteiler $\mathfrak{A}$ geht durch die Stelle a, b hindurch. Ferner ordnen wir dem Primteiler $\mathfrak{L}$ für alle Stellen a, b, für die a nicht unendlich ist, die Funktion 1 zu und für die Stellen $\infty; b$ die Funktion u. Ebenso ordnen wir dem Primteiler $\mathfrak{M}$ für alle Stellen a, b, für die b nicht unendlich ist, die Funktion 1 zu und für die Stellen a, ∞ die Funktion v.

§ 4.

Anzahl der Schnittpunkte zweier Primteiler erster Stufe.

Es seien $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ zwei Primteiler erster Stufe. Es sei a, b eine Stelle, durch die sowohl $\mathfrak{A}$ als $\mathfrak{B}$ hindurchgeht. Die $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ entsprechenden Kurven schneiden sich dann in a, b. Wir sagen auch, die Primteiler schneiden sich an der Stelle a, b. Die Anzahl der Schnittpunkte, die an der Stelle a, b zusammenfallen, definieren wir folgendermaßen. Wir setzen $x - a = u$, $y - b = v$. Es sei $\bar{A}$ die $\mathfrak{A}$ und $\bar{B}$ die $\mathfrak{B}$ zugeordnete Funktion für die Stelle a, b. $\bar{A}, \bar{B}$ sind ganze rationale Funktionen von u, v die bei unserer Annahme für $u = 0$, $v = 0$ verschwinden. Setzen wir $\bar{B} = 0$, so wird dadurch ein algebraischer Körper einer unabhängigen Veränderlichen definiert. In dem so definierten Körper denken wir uns $\bar{A}$ in Primfaktoren zerlegt. Es wird dann $\bar{A}$ einen Divisor enthalten, dessen Primfaktoren sowohl in u als auch in v aufgehen. Ist der Grad dieses Divisors h, so sagen wir, die Primteiler $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ oder auch die Kurven $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ schneiden sich im Punkte a, b in h zusammenfallenden Punkten. Diese Definition ist nur scheinbar nicht gleichmäßig abhängig von $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$. Es gilt nämlich der Satz: Die Resultante von $\bar{A}$ und $\bar{B}$, die durch Elimination von u entsteht und die eine ganze rationale Funktion von v ist, ist genau durch v^h teilbar.

*) Siehe auch die Definition der zugeordneten Funktionen in meiner Arbeit: Primteiler algebraischer Funktionen zweier unabhängigen Veränderlichen usw., § 4. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Bd. 26 (1908).

Die hier gegebene Definition stimmt daher, soweit es sich um im Endlichen liegende Punkte handelt, mit der üblichen überein. Bestimmen wir in dieser Weise für alle Schnittpunkte die Anzahl der in ihnen zusammenfallenden Schnittpunkte und addieren die so erhaltenen Zahlen, so bekommen wir die Gesamtheit aller Schnittpunkte von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$. Es sei $\mathfrak{A}$ von der Ordnung (λ, μ) und $\mathfrak{B}$ von der Ordnung (λ', μ'); es sei ferner A die ganze Funktion, deren Zähler $\mathfrak{A}$ ist, und B die ganze Funktion, deren Zähler $\mathfrak{B}$ ist. Im Körper $B = 0$ wird unter Anwendung der Bezeichnungen des § 1

$$A = \frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{n}_x^\lambda \mathfrak{n}_y^\mu},$$

wo $\mathfrak{g}$ ganz ist. Nach unserer Definition ist die Anzahl aller Schnittpunkte von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ gleich der Ordnung des Divisors $\mathfrak{g}$, also gleich der Ordnung von $\mathfrak{n}_x^\lambda \mathfrak{n}_y^\mu$. Aber $\mathfrak{n}_x$ ist von der Ordnung μ' und $\mathfrak{n}_y$ von der Ordnung λ'; daher ist die Anzahl der Schnittpunkte

$$(\mathfrak{B}, \mathfrak{A}) = (\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) = \lambda \mu' + \lambda' \mu .$$

Sind $G = 0$, $H = 0$ zwei algebraische Kurven vom Grade n und n' im Sinne der analytischen Geometrie, so ergibt sich als Anzahl ihrer Schnittpunkte der Wert $2nn'$, während man im allgemeinen nur nn' Schnittpunkte rechnet. Die Kurven haben aber, wenn keine Besonderheiten vorliegen, im Unendlichen einen n- und n'-fachen Punkt mit getrennten Tangenten, so daß nn' Schnittpunkte im Unendlichen liegen. Diese werden in der analytischen Geometrie nicht mitgezählt. Falls die Funktionen G, H von besonderer Art sind, können von den im Endlichen liegenden nn' Schnittpunkten auch noch welche ins Unendliche fallen. Diese werden dann aber in der analytischen Geometrie etwas inkonsequenterweise mitgerechnet.

Das Symbol $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ läßt sich ausdehnen auf den Fall, daß $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ nicht Primteiler, sondern Produkte oder Quotienten von solchen, d. h. sogenannte Divisoren, sind, indem man definiert

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1, \mathfrak{B}) = (\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) + (\mathfrak{A}_1, \mathfrak{B}), \qquad \left(\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{A}_1}, \mathfrak{B}\right) = (\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) - (\mathfrak{A}_1, \mathfrak{B}).$$

Es ist ferner noch praktisch, wenn $\mathfrak{A}$ ein Primteiler der Ordnung (λ, μ) ist, zu definieren

$$(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}) = 2\lambda\mu.$$

Es ist dann das Symbol $(\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2)$ für irgend zwei (teilerfremde oder nicht teilerfremde) Divisoren definiert und es ist für zwei Divisoren $\mathfrak{D}, \mathfrak{T}$, die derselben Klasse (§ 6) angehören

$$(\mathfrak{D}, \mathfrak{D}) = (\mathfrak{D}, \mathfrak{T}) = (\mathfrak{T}, \mathfrak{T}),$$

wie leicht zu beweisen.

§ 5.

Primteiler zweiter Stufe.

Es sei a, b ein Wertsystem von x, y, wobei aber nicht ausgeschlossen sein soll, daß a oder b den Wert ∞ hat. Es ist dann im folgenden unter $x-a, y-b$ zu verstehen $\frac{1}{x}, \frac{1}{y}$. Es sei ferner

$$y - b = a_1 (x-a)^{\frac{\varepsilon_1}{\alpha}} + a_2 (x-a)^{\frac{\varepsilon_2}{\alpha}} + \cdots, \tag{3.}$$

wo $\alpha, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ ganze positive Zahlen sind, die Entwicklung einer algebraischen Funktion. Wir ordnen jeder solchen Entwicklung einen *Primteiler* $\mathfrak{p}$ zu, indem wir analog wie in § 1 definieren: Eine rationale Funktion von x, y ist durch $\mathfrak{p}^\lambda$ teilbar, wenn sie unter Benutzung von (3.) übergeht in eine durch $(x-a)^{\frac{\lambda}{\alpha}}$ teilbare Potenzreihe von $x-a$. Dabei soll Entwicklungen, die auseinander dadurch hervorgehen, daß x ein oder mehrere Male den Punkt a umläuft, derselbe Primteiler entsprechen. Die so definierten Primteiler heißen *Primteiler zweiter Stufe.* Ist $\alpha > 1$, so nennen wir den Primteiler einen *Verzweigungsprimteiler der Ordnung* $\alpha - 1$.

Wir setzen ferner $x-a=u, y-b=v$, so daß $\mathfrak{p}$ auch definiert wird durch

$$v = a_1 u^{\frac{\varepsilon_1}{\alpha}} + a_2 u^{\frac{\varepsilon_2}{\alpha}} + \cdots.$$

Ist nun $\mathfrak{A}$ irgend ein Primteiler erster Stufe und $\overline{A}(u, v)$ seine zugeordnete Funktion für die Stelle a, b, so sagen wir, $\mathfrak{A}$ ist durch $\mathfrak{p}_\lambda$ teilbar, wenn $\overline{A}$ durch $\mathfrak{p}^\lambda$ teilbar ist.

§ 6.

Divisoren-Klassen.

Das Produkt von irgend welchen Primteilern erster und zweiter Stufe nennen wir einen *Divisor*. Es sei

$$P = \mathfrak{A}_1^{\alpha_1}\mathfrak{A}_2^{\alpha_2}\ldots\mathfrak{A}_\nu^{\alpha_\nu}\mathfrak{a}_1^{\beta_1}\mathfrak{a}_2^{\beta_2}\ldots,$$

wobei die $\mathfrak{A}$ Primteiler erster und die $\mathfrak{a}$ Primteiler zweiter Stufe sein sollen, und wo ferner die α_i und β_i ganze positive oder negative Zahlen sind. Ist (λ_i, μ_i) die Ordnung von $\mathfrak{A}_i$, so nennen wir

$$(\alpha_1\lambda_1 + \alpha_2\lambda_2 + \cdots + \alpha_\nu\lambda_\nu,\ \alpha_1\mu_1 + \alpha_2\mu_2 + \cdots + \alpha_\nu\mu_\nu)$$

die Ordnung von P. Wir nennen P einen *ganzen Divisor*, wenn erstens die α_i alle positiv oder Null sind und wenn zweitens diejenigen unter den Potenzen $\mathfrak{a}_1^{-\beta_1}, \mathfrak{a}_2^{-\beta_2}, \ldots$, deren Exponenten positiv sind, in $\mathfrak{A}_1^{\alpha_1}\mathfrak{A}_2^{\alpha_2}\ldots\mathfrak{A}_\nu^{\alpha_\nu}$ enthalten sind. Enthält ein Divisor nur Primteiler erster Stufe, so nennen wir ihn einen *Divisor erster Stufe*. Enthält er nur Primteiler zweiter Stufe, so nennen wir ihn einen *Divisor zweiter Stufe*. Ist im besonderen P ein Divisor, der durch Zerlegung einer rationalen Funktion erhalten ist, so ist er ein Divisor erster Stufe und seine Ordnung ist (0,0). Es gilt hier bei den rationalen Funktionen von x, y auch das umgekehrte.

Es sei a, b irgend eine Stelle und es seien Primteiler zweiter Stufe für diese Stelle definiert durch die Entwicklungen

$$v = u_1,\ v = u_2, \ldots\ v = u_\tau. \tag{4.}$$

Um die Ideen zu fixieren, sei etwa u_1 eine gewöhnliche Potenzreihe von $u^{\frac{1}{\alpha}}$ und es seien $u_1, \ldots u_\alpha$ die konjugierten Entwicklungen, ebenso seien $u_{\alpha+1}, \ldots u_{\alpha+\beta}$ und auch $u_{\alpha+\beta+1}, \ldots u_{\alpha+\beta+\gamma}$ konjugierte Entwicklungen, so daß $\alpha+\beta+\gamma=\tau$. Es werden dann durch die Entwicklungen (4.) drei Primteiler $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{a}_3$ definiert, und zwar Verzweigungsprimteiler der Ordnung $\alpha-1$, $\beta-1$, $\gamma-1$. Wir nennen das Produkt

$$\mathfrak{z} = \mathfrak{a}_1^{\alpha-1}\mathfrak{a}_2^{\beta-1}\mathfrak{a}_3^{\gamma-1}$$

den zu irgend einem aus $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{a}_3$ gebildeten Divisor gehörenden *Verzweigungsdivisor.*

Ferner bilden wir

$$f(u, v) = (v - u_1)(v - u_2) \cdots (v - u_\tau).$$

Dies ist eine gewöhnliche Potenzreihe von u, v. Ist nun $\frac{\partial f(u, v)}{\partial v}$ teilbar durch

$$\mathfrak{a}_1^{e_1} \mathfrak{a}_2^{e_2} \mathfrak{a}_3^{e_3},$$

so setzen wir

$$\mathfrak{a}_1^{e_1} \mathfrak{a}_2^{e_2} \mathfrak{a}_3^{e_3} = \mathfrak{z}\,\mathfrak{d}$$

und nennen den so definierten Divisor $\mathfrak{d}$ den zu irgend einem aus $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{a}_3$ zusammengesetzten Divisor gehörenden *Doppelpunktsdivisor.* Der Divisor $\mathfrak{d}$ ergibt sich immer als ganzer Divisor von gerader Ordnung*).

Ist weiter $\mathfrak{p}$ irgend ein ganzer Divisor zweiter Stufe, so können wir für jede Stelle, für die Primteiler in $\mathfrak{p}$ vorkommen, den Doppelpunktsdivisor definieren. Das Produkt aller so erhaltenen Divisoren bezeichnen wir wieder mit $\mathfrak{d}$ und nennen $\mathfrak{d}$ den zu $\mathfrak{p}$ gehörenden Doppelpunktsdivisor. Wir nennen den Primteiler $\mathfrak{p}$ *kanonisch,* wenn er durch den zugehörigen Doppelpunktsdivisor teilbar ist.

Wir teilen alle Divisoren in Klassen ein, indem wir zwei Divisoren dann und nur dann in dieselbe Klasse aufnehmen, wenn ihr Quotient einer Funktion des Körpers K entspricht, d. h. also in diesem einfachen Fall, wenn sie in den Divisoren zweiter Stufe übereinstimmen und dieselbe Ordnung haben. Die Ordnung aller Divisoren einer Klasse ist danach dieselbe und diese heißt auch *Ordnung der Klasse.* Eine Anzahl Divisoren derselben Klasse heißt linear unabhängig, wenn zwischen den Funktionen, die aus ihnen durch Division mit einem Divisor der Klasse hervorgehen, keine lineare Gleichung mit konstanten Koeffizienten besteht. Die Anzahl der in einer Klasse enthaltenen ganzen linear unabhängigen Divisoren heißt *Dimension der Klasse.* Ist $\mathfrak{A}$ ein nicht speziell gewählter ganzer Divisor der Klasse und ist die ganze rationale Funktion A, deren Zähler $\mathfrak{A}$ ist, un-

---

*) *H, L.* S. 382.

zerlegbar, so heißt das Geschlecht des durch $A=0$ definierten Körpers das *Geschlecht der Klasse.*

Es sei nun P ein Divisor. Wir stellen ihn in der Form dar

$$P=\mathfrak{P}\frac{\mathfrak{p}'}{\mathfrak{p}},$$

wo $\mathfrak{P}$ ein Divisor erster und $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}'$ *ganze* Divisoren zweiter Stufe sind. Die Ordnung von $\mathfrak{P}$ sei (λ, μ).

Jeder Divisor der Klasse (P) ist von der Form $\mathfrak{Q}\frac{\mathfrak{p}'}{\mathfrak{p}}$, wo $\mathfrak{Q}$ ein Divisor erster Stufe der Ordnung (λ, μ) ist. Will man die ganzen Divisoren in (P) bestimmen, so kommt es offenber auf $\mathfrak{p}'$ gar nicht an. Wir nehmen daher der Einfachheit halber an, $\mathfrak{p}'$ sei gleich 1. Ist ferner $\mathfrak{G}\frac{1}{\mathfrak{p}}$ ein ganzer Divisor der Klasse (P), so muß $\mathfrak{G}$ durch $\mathfrak{p}$ teilbar sein und $\mathfrak{G}$ selbst ganz sein. Es ist also $\mathfrak{G}$ der Zähler einer ganzen rationalen Funktion von x, y vom Grade (λ, μ). Zunächst muß daher $(\lambda, \mu) \geqq (0, 0)$ sein, sonst ist sicher die Dimension $r=0$. Es ist weiter die ganze rationale Funktion G, deren Zähler $\mathfrak{G}$ ist, so zu bestimmen, daß $\mathfrak{G}$ durch $\mathfrak{p}$ teilbar wird. Geometrisch ausgedrückt heißt das: Es sollen alle Kurven $G=0$ bestimmt werden, die höchstens vom Grade (λ, μ) sind und die sich an gegebenen Stellen in gegebener Weise verhalten. Es ist also eine lineare Kurvenschar zu bestimmen.

§ 7.

Beweis dafür, daß der Divisor $\mathfrak{p}$ immer durch einen kanonischen ersetzt werden kann.

Es seien für die Stelle a, b Primteiler zweiter Stufe $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots$ definiert. Wir wollen die Bedingung, daß eine ganze rationale Funktion durch einen aus den $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$, ... zusammengesetzten Divisor

$$\mathfrak{p}=\mathfrak{a}_1^{\alpha_1}\mathfrak{a}_2^{\alpha_2}\cdots$$

teilbar ist, ersetzen durch die Bedingung, daß die ganze rationale Funktion

teilbar ist durch einen anderen passend gewählten Divisor $\mathfrak{q}$, der sicher kanonisch ist.

Sind ϱ_0 und σ_0 genügend groß gewählte ganze Zahlen, so sind sicher $(x-a)^\varrho$, $(y-b)^\sigma$ durch $\mathfrak{p}$ teilbar, wenn $\varrho \geqq \varrho_0, \sigma > \sigma_0$. Wir betrachten nun alle ganzen rationalen Funktionen von x, y, die höchstens vom Grade $(\varrho_0 - 1, \sigma_0 - 1)$ sind und sondern aus diesen diejenigen aus, die durch $\mathfrak{p}$ teilbar sind. Da die Bedingungsgleichungen, die sich dafür ergeben, linear in den Koeffizienten der ganzen rationalen Funktionen sind, so bekommen wir eine endliche Anzahl von linear unabhängigen Funktionen

$$A_1, A_2, \dots A_\nu$$

von der Art, daß jede ganze Funktion, die durch $\mathfrak{p}$ teilbar ist, sich in der Form darstellen läßt

$$c_1 A_1 + c_2 A_2 + \cdots + c_\nu A_\nu + g_1 (x-a)^{\varrho_0} + g_2 (y-b)^{\sigma_0},$$

wo die c_i Konstanten und g_1, g_2 ganze rationale Funktionen von x, y sind. Umgekehrt ist auch jede solche Funktion durch $\mathfrak{p}$ teilbar.

Wir betrachten die Funktion

$$A = c_1 A_1 + c_2 A_2 + \cdots + c_\nu A_\nu,$$

wo die c_i Konstanten sind, die wir als Parameter betrachten. Die Diskriminante von A in bezug auf y sei f. Befreien wir f von dem etwa vorhandenen Faktor $x - a$ und setzen dann $x = a$, so ergibt sich eine ganze rationale Funktion der c_i, die mit g bezeichnet werden möge. Wir lassen für die c_i nur solche Werte zu, für die g nicht Null wird. Diejenigen Wurzeln von $A = 0$, die für $x = a$ den Wert b annehmen, seien

$$y_1, y_2, \cdots y_k.$$

Die Anzahl dieser Wurzeln ist für die zugelassenen Werte der c_i immer dieselbe und auch die Form der Entwicklungen dieser Wurzeln nach Po-

tenzen von $x-a$, d. h. die Exponenten der in ihnen vorkommenden Glieder, während die Koeffizienten mit den c_i variieren.

Es gilt nun folgender wichtige Satz: *Stimmen zwei der Entwicklungen y_i nach Potenzen von $x-a$ in den ersten $s+1$ Gliedern überein für alle zugelassenen Werte c_i, so sind die Koeffizienten dieser Glieder von den c_i unabhängig.* Es sei etwa

$$y_1 = b + a_1(x-a)^{\frac{\varepsilon_1}{\alpha}} + a_2(x-a)^{\frac{\varepsilon_2}{\alpha}} + \cdots,$$

$$y_2 = b + b_1(x-a)^{\frac{\varepsilon_1}{\alpha}} + b_2(x-a)^{\frac{\varepsilon_2}{\alpha}} + \cdots$$

und es sei $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$, $\cdots$ $a_s = b_s$ für alle zugelassenen Werte c_i. Nun ergeben sich aber*) a_1 und b_1 als Wurzeln einer algebraischen Gleichung $\varphi(\zeta) = 0$, deren Koeffizienten lineare Funktionen der c_i sind. Soll $a_1 = b_1$ sein, so muß sich von der Funktion $\varphi(\zeta)$ rational der Faktor $(\zeta - a_1)^2$ abspalten lassen. Würde a_1 von den c_i abhängen, so würde es daher eine rationale Funktion der c_i sein; dann aber könnte $\varphi(\zeta)$ nicht — wie es sein muß — eine lineare Funktion der c_i sein. Es ist also a_1 von den c_i unabhängig und ebenso ist der Beweis für die folgenden Koeffizienten zu führen. Wir nennen in jeder der Entwicklungen y_i denjenigen Teil, der aus den ersten Gliedern besteht, soweit sie konstante Koeffizienten haben, den *wesentlichen Teil.*

Wir bezeichnen nun mit h_i eine Entwicklung, deren erste Glieder mit dem wesentlichen Teil von y_i übereinstimmen und deren weitere Glieder mindestens von derselben Ordnung sind wie das auf den wesentlichen Teil in y_i folgende Glied. Außerdem soll die Ordnung der Verzweigung des durch h_i definierten Primteilers dieselbe sein wie die des durch y_i definierten und endlich sollen die h_i so gewählt sein, daß keine der Differenzen $h_i - h_k$ durch eine höhere Potenz von $x-a$ teilbar ist, als nach den vorausgegangenen Bestimmungen unbedingt nötig ist.

Wir definieren nun Primteiler zweiter Stufe für die Stelle a, b durch die Entwicklungen

$$y = h_i. \qquad (i = 1, 2, \cdots k)$$

*) *H, L.* S. 45.

Die so definierten Primteiler brauchen nicht alle verschieden zu sein. Denn wenn zwei der Entwicklungen h_i auseinander dadurch hervorgehen, daß x ein oder mehrere Male den Punkt a umläuft, so sind die zugehörigen Primteiler miteinander identisch. Die so definierten, voneinander verschiedenen Primteiler nennen wir $\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \cdots$. Wir bestimmen nun einen Divisor zweiter Stufe

$$\mathfrak{q} = \mathfrak{b}_1^{\beta_1}\, \mathfrak{b}_2^{\beta_2} \cdots$$

so, daß jede der Funktionen A_i durch $\mathfrak{q}$ teilbar ist und nicht alle A_i einen der Divisoren $\mathfrak{b}_k$ in einer höheren Potenz enthalten, als er in $\mathfrak{q}$ vorkommt. Dann gilt: *Jede ganze rationale Funktion von x, y, die durch $\mathfrak{p}$ teilbar ist, ist auch durch $\mathfrak{q}$ teilbar und umgekehrt.* Zunächst folgt ohne weiteres aus der Definition von $\mathfrak{q}$: Jede ganze rationale Funktion, die durch $\mathfrak{p}$ teilbar ist, ist auch durch $\mathfrak{q}$ teilbar.

Um das Umgekehrte zu beweisen, verfahren wir so: Es sei B irgend eine ganze rationale Funktion, die durch $\mathfrak{q}$ teilbar ist.

Wir betrachten die Funktion

$$C = c_0 B + c_1 A_1 + c_2 A_2 + \cdots + c_\nu A_\nu = c_0 B + A,$$

wo die c_i Konstanten sind. Es seien $\eta_1, \eta_2, \ldots$ diejenigen Wurzeln von $C = 0$, die für $x = a$ den Wert b annehmen. Bestimmt man die Entwicklungen dieser Wurzeln nach Potenzen von $x - a$ wie bei *II*, *L.* S. 39 u. fg. und beachtet, daß nach Voraussetzung für $y = h_i$ die Funktion C mindestens durch dieselbe Potenz von $x - a$ teilbar wird wie die Funktion A, so findet man, daß zunächst die Anzahl der η_i gleich der Anzahl der y_i gleich k ist und daß ferner bei passender Wahl der Bezeichnung die Entwicklungen gelten

$$\eta_i = h_i + g_i; \qquad (i = 1, 2, \ldots k)$$

dabei enthält g_i nur Glieder, die mindestens von der Ordnung des in y_i auf den wesentlichen Teil folgenden Gliedes sind.

Dann aber ist, wenn durch die Entwicklung

$$y = \overline{y}$$

irgend ein Primteiler $\mathfrak{a}$ definiert ist, $\bar{y}-\eta_i$ immer mindestens durch dieselbe Potenz von $x-a$ teilbar, wie $\bar{y}-y_i$. Daher ist auch $(y-\eta_1)\cdots(y-\eta_k)$ und damit auch C durch dieselbe Potenz von $\mathfrak{a}$ teilbar wie $(y-y_1)\cdots(y-y_k)$ oder A. Es ist also C durch $\mathfrak{p}$ teilbar, weil A durch $\mathfrak{p}$ teilbar ist. Da aber alle A_i durch $\mathfrak{p}$ teilbar sind, so ist auch — wie bewiesen werden sollte — B durch $\mathfrak{p}$ teilbar.

Es kann also für unseren Zweck $\mathfrak{p}$ durch $\mathfrak{q}$ ersetzt werden. Aber der Divisor $\mathfrak{q}$ ist kanonisch. Es sei nämlich etwa $\mathfrak{b}_1$ der durch h_1 definierte Primteiler und er sei Verzweigungsteiler der Ordnung $\alpha-1$; dann ist in $\mathfrak{q}$ die β-te Potenz von $\mathfrak{b}_1$ enthalten, wenn

$$(5.)\qquad (h_1-y_1)(h_1-y_2)\cdots(h_1-y_k)$$

genau durch $(x-a)^{\frac{\beta}{\alpha}}$ teilbar ist. Nun sei $\mathfrak{d}$ der zu $\mathfrak{q}$ gehörige Doppelpunktsdivisor und $\mathfrak{z}$ der Verzweigungsdivisor, dann ist $\mathfrak{d}\mathfrak{z}$ genau durch $\mathfrak{b}_1^{\gamma}$ teilbar, wenn

$$(6.)\qquad (h_1-h_2)(h_1-h_3)\cdots(h_1-h_k)$$

durch $(x-a)^{\frac{\gamma}{\alpha}}$ teilbar ist. Es ist aber h_1-h_i durch dieselbe Potenz von $x-a$ teilbar, wie h_1-y_i, also ist $\gamma<\beta$, da in (5.) das Glied h_1-y_1 vorkommt, dem in (6.) kein Glied entspricht. Folglich ist $\mathfrak{q}$ sogar durch $\mathfrak{d}\mathfrak{z}$ teilbar, also sicher kanonisch.

Es gilt noch folgender Satz: Es seien $\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{q}'$ zwei kanonische Divisoren, die für den vorliegenden Zweck für einander gesetzt werden können. Es seien ferner δ, δ' ihre Ordnungen und $2d, 2d'$ die Ordnungen der zugehörigen Doppelpunktsdivisoren. Dann ist $\delta-d=\delta'-d'$. Man könnte die Differenz $\delta-d$ etwa die *charakteristische Zahl* eines kanonischen Divisors $\mathfrak{q}$ nennen.

Unter allen kanonischen Divisoren, die einander ersetzen können, gibt es solche von möglichst niedriger Ordnung. (Man bekommt z. B. einen solchen, wenn man den kanonischen Divisor in der in diesem Paragraphen angegebenen Art bestimmt.) Ist diese möglichst niedrige Ordnung gleich δ, so nennen wir

$$(\mathfrak{P}, \mathfrak{P}) - \delta = 2\lambda\mu - \delta = D$$

den *Grad des Divisors* (5.) und auch den *Grad* der durch (5.) bestimmten *Klasse*. Sind λ und μ hinlänglich groß, so ist der Grad nichts anderes als die Anzahl der Schnittpunkte irgend zweier ganzen Divisoren der Klasse vermindert um die Anzahl der allen gemeinsamen Schnittpunkte.

§ 8.

Die Dimension r, der Grad D und das Geschlecht ϱ einer Klasse.

Wir hatten unser Problem zurückgeführt auf die Aufgabe, alle ganzen rationalen Funktionen vom Grade (λ, μ) zu bestimmen, die durch einen gegebenen ganzen Divisor zweiter Stufe $\mathfrak{p}$ teilbar sind. Die Stellen, denen die Primteiler von $\mathfrak{p}$ zugeordnet sind, nennen wir Grundpunkte. Es seien dies die Stellen $a, b; a_1, b_1; \cdots$. Nach dem Resultate des vorigen Paragraphen können wir annehmen, daß $\mathfrak{p}$ ein kanonischer Divisor von möglichst niedriger Ordnung ist. Die Ordnung von $\mathfrak{p}$ sei δ. Es sei ferner $\mathfrak{d}$ der zu $\mathfrak{p}$ gehörige Doppelpunktsdivisor und seine Ordnung sei $2d$.

Wir bestimmen nun eine ganze rationale Funktion $F(x, y)$, die folgende Eigenschaften hat:

1. F sei unzerlegbar und verschwinde an den Grundpunkten.
2. Die Entwicklungen derjenigen Wurzeln von $F=0$, die für $x=a_i$ den Wert b_i annehmen, sollen so beschaffen sein, daß sie zur Definition der in $\mathfrak{p}$ vorkommenden Primteiler benutzt werden können, und andere Wurzeln, die für $x=a_i$ den Wert b_i annehmen, sollen nicht vorhanden sein.
3. Der Doppelpunktsdivisor von $F=0$ soll mit dem Doppelpunktsdivisor von $\mathfrak{p}$ identisch sein.
4. Der Grad (l, m) von $F(x, y)$ soll nicht kleiner sein als (λ, μ).

Der Divisor $\mathfrak{p}$ kann jetzt auch aufgefaßt werden als ein Divisor des durch $F=0$ definierten Körpers $\mathfrak{F}$. Die Ordnung von $\mathfrak{p}$ ist natürlich auch dann gleich δ.

Unsere Aufgabe ist damit zurückgeführt auf die Aufgabe, alle ganzen rationalen Funktionen zu bestimmen, die als Funktionen des Körpers $\mathfrak{F}$ unter Benutzung der Begriffe und Bezeichnungen des § 1 die Zerlegung zulassen:

$$(7.)\qquad G(x,y)=\frac{\mathfrak{p}\,\mathfrak{g}}{\mathfrak{n}_x^\lambda\,\mathfrak{n}_y^\mu},$$

wo $\mathfrak{g}$ ein ganzer Divisor ist. Aber da $\mathfrak{p}$ durch den Doppelpunktsdivisor $\mathfrak{d}$ teilbar ist, so ist, nach dem in § 1 über den Doppelpunktsdivisor angegebenen Satze auch umgekehrt jede Funktion aus $\mathfrak{F}$, die in der Form (7.) darstellbar ist, als ganze rationale Funktion von x, y, höchstens vom Grade (λ, μ) darstellbar. Unsere Aufgabe reduziert sich also auf eine Aufgabe der Theorie der algebraischen Funktionen einer Veränderlichen. Die Dimension r unserer Klasse wird identisch mit der Dimension der durch den Divisor $\frac{\mathfrak{n}_x^\lambda\,\mathfrak{n}_y^\mu}{\mathfrak{p}}$ definierten Klasse des Körpers $\mathfrak{F}$. Daher ist, wenn wir mit p das Geschlecht des Körpers $\mathfrak{F}$ bezeichnen, unter Benutzung des *Riemann-Roch*schen Satzes

$$(8.)\qquad r=\left\{\frac{\mathfrak{n}_x^\lambda\,\mathfrak{n}_y^\mu}{\mathfrak{p}}\right\}=\left\{\frac{\mathfrak{z}_x\,\mathfrak{p}}{\mathfrak{n}_x^{\lambda+2}\,\mathfrak{n}_y^\mu}\right\}+\lambda m+\mu l-\delta-p+1.$$

Wir betrachten nun weiterhin nur den Fall, wo die Dimension $r>0$. Es sei dann $\mathfrak{A}$ ein nicht gerade speziell gewählter ganzer Divisor aus (P). Unter dieser Annahme können wir die ganze rationale Funktion $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{L}^\lambda\,\mathfrak{M}^\mu}$ anstatt F nehmen. Der Einfachheit wegen nehmen wir an, daß die so gewählte Funktion F irreduzibel ist, d. h. daß der Divisor $\mathfrak{A}$ ein Primteiler ist. Es ist jetzt $(l, m)=(\lambda, \mu)$ und infolgedessen ist der Zähler von F, der im Körper $\mathfrak{F}$ identisch Null ist, auch ein ganzer Divisor der Klasse (P). Es ist daher in (8.) rechts noch 1 hinzuzufügen. Ferner wird jetzt p gleich dem Geschlechte ϱ der Klasse (P). Setzen wir noch in diesem Fall

$$\left\{\frac{\mathfrak{z}_x\,\mathfrak{p}}{\mathfrak{n}_x^{\lambda+2}\,\mathfrak{n}_y^\mu}\right\}=\left\{\frac{\mathfrak{p}}{\mathfrak{d}\,\mathfrak{n}_x^2\,\mathfrak{n}_y^2}\right\}=r',$$

so wird

$$r=r'+2\lambda\mu-\delta-\varrho+2;$$

da aber

$$\text{I.}\qquad \varrho=(\lambda-1)(\mu-1)-d,$$

so ergibt sich

II. $$r = r' + (\lambda+1)(\mu+1) - (\delta - d).$$

Die Ordnung des Divisors $\frac{\mathfrak{p}}{\mathfrak{d}\,\mathfrak{n}_x^2\,\mathfrak{n}_y^2}$ ist

$$\delta - 2d - 2(\lambda+\mu),$$

also kleiner als Null, wenn auch nur eine der beiden Größen λ, μ hinlänglich groß wird. Dann aber ist sicher r' als Dimension einer Klasse von negativer Ordnung gleich Null. In diesem Falle nennt man die Klasse (P) oder auch die zugehörige Kurvenschar *regulär*. Für diesen Fall ist

II'. $$r = (\lambda+1)(\mu+1) - (\delta - d).$$

Es ist dann also die Anzahl der linear unabhängigen Kurven der Schar gleich der Anzahl $(\lambda+1)(\mu+1)$ der linear unabhängigen ganzen rationalen Funktionen vom Grade (λ, μ) vermindert um die von λ, μ unabhängige Zahl $\delta - d$, die charakteristische Zahl des Divisors $\mathfrak{p}$.

Weiter ist nach der Definition am Schlusse des vorigen Paragraphen der Grad der Kurvenschar oder Klasse (P)

III. $$D = 2\lambda\mu - \delta.$$

Aus den Gleichungen I., II., III. ergibt sich

IV. $$D = r - r' + \varrho - 2.$$

§ 9.

Das Produkt zweier Klassen.

Es seien (P_1) und (P_2) zwei Klassen. Wir können annehmen, sie seien definiert durch die Divisoren

$$\frac{\mathfrak{P}_1}{\mathfrak{p}_1}, \quad \frac{\mathfrak{P}_2}{\mathfrak{p}_2},$$

wo $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2$ ganze Divisoren zweiter Stufe, und zwar kanonische von möglichst niedriger Ordnung sind. Es liegt nahe, das Produkt der Klassen $(P_1), (P_2)$

zu definieren als diejenige Klasse, die durch den Divisor $\frac{\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2}{\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2}$ definiert wird. Jedoch erweist es sich als praktisch, das Produkt in etwas komplizierterer Art zu definieren.

Die Gesamtheit der in (P_1) enthaltenen ganzen Divisoren können mit $\mathfrak{p}_2$ einen gemeinsamen Teiler haben. Den größten gemeinsamen Teiler nennen wir $\mathfrak{p}'$. Ebenso sei $\mathfrak{p}''$ der größte gemeinsame Teiler der ganzen Divisoren von (P_2) und $\mathfrak{p}_1$. Sind in (P_1) keine ganzen Divisoren enthalten, so ist $\mathfrak{p}' = 1$ zu setzen, ebenso ist $\mathfrak{p}'' = 1$ zu setzen, wenn (P_2) keine ganzen Divisoren enthält. Wir definieren nun das Produkt der beiden Klassen (P_1), (P_2) durch die Gleichung

$$(P_1)(P_2) = \left(\frac{\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2}{\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}'\mathfrak{p}''}\right).$$

Diese Klasse wollen wir mit (P) bezeichnen. Man zeigt leicht, daß die Definition unabhängig ist von der Wahl der Divisoren $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$ innerhalb der Klassen $(P_1), (P_2)$. Wir benutzen die Bezeichnungen des vorigen Paragraphen und geben allen auf die Klasse (P_i) sich beziehenden Größen den Index i, während wir alle sich auf (P) beziehenden Größen ohne Index lassen.

Wir beschränken uns weiterhin auf den Fall, daß die drei hier vorkommenden Klassen mindestens die Dimension 1 haben und daß in jeder der Klassen wenigstens ein ganzer Divisor enthalten ist, der ein Primteiler ist. Es werde nun die Ordnung des Divisors $\mathfrak{p}'\mathfrak{p}''$, die immer gerade ist, mit $2k$ bezeichnet. Es ist dann, wenn die Ordnungen von (P_1) und (P_2) hinlänglich groß sind, k die Anzahl der festen Schnittpunkte der Kurven der Schar (P_1) mit den Kurven der Schar (P_2). Die Anzahl der übrigen Schnittpunkte bezeichnen wir mit i. Da die Zahl aller Schnittpunkte gleich $\lambda_1\mu_2 + \lambda_2\mu_1$ ist, so ergibt sich die Gleichung

$$k + i = \lambda_1\mu_2 + \lambda_2\mu_1. \tag{9.}$$

Ferner wird

$$(\lambda, \mu) = (\lambda_1 + \lambda_2, \mu_1 + \mu_2), \tag{10.}$$

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}'\mathfrak{p}'',$$

$$\delta = \delta_1 + \delta_2 + 2k. \tag{11.}$$

Weiter findet man für den zu $\mathfrak{p}$ gehörenden Doppelpunktsdivisor

$$\mathfrak{d} = \mathfrak{d}_1 \mathfrak{d}_2 \mathfrak{p}' \mathfrak{p}'',$$

woraus durch Vergleichung der Ordnungen folgt

$$(12.) \qquad 2d = 2d_1 + 2d_2 + 2k \text{ oder } d = d_1 + d_2 + k.$$

Es ist also, da $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{p}_2$ in kanonischer Form angenommen und also durch $\mathfrak{d}_1$, $\mathfrak{d}_2$ teilbar sind, auch $\mathfrak{p}$ durch $\mathfrak{d}$ teilbar; daher hat auch $\mathfrak{p}$ die kanonische Form. Durch Anwenden der Formeln des vorigen Paragraphen ergibt sich

$$r = r' + (\lambda + 1)(\mu + 1) - (\delta - d)$$

und mit Benutzung der Gleichungen (9.) bis (12.)

$$\text{I.} \qquad r = r_1 + r_2 + i - 1 + r' - r_1' - r_2'.$$

Ebenso folgt

$$\text{II.} \qquad D = 2\lambda\mu - \delta = D_1 + D_2 + 2i,$$

$$\text{III.} \qquad \varrho = (\lambda - 1)(\mu - 1) - d = \varrho_1 + \varrho_2 + i - 1.$$

Damit sind die Hauptformeln aus der Theorie der ebenen Kurvenscharen, und zwar unter den allgemeinsten Annahmen, hergeleitet.

Zur Determinanten-Lehre.

Von Herrn *Louis Saalschütz* in Königsberg i. Pr.

Der nachfolgende Aufsatz behandelt in § 1 ein einfaches neues Bildungsgesetz der Determinanten gerader Ordnung. In § 2 folgt zum Zweck der Durchführung eines Beispiels zu § 1 ein Satz über halbsymmetrische Determinanten. Der § 3 bringt als das erwähnte Beispiel die bereits von *Glaisher* erwiesene Reduzierbarkeit einer Zirkulante $(2m)$-ter auf eine solche m-ter Ordnung, aber in *direkter Darstellung*. In § 4 wird die Ordnung der darstellenden Determinante noch um eine Einheit erniedrigt. In § 5 endlich wird im Anschluß an § 4 eine spezielle *Hankel*sche Determinante behandelt.

§ 1.

Jede Determinante gerader Ordnung läßt sich als Quadratwurzel einer halbsymmetrischen darstellen; da nun letztere das Quadrat einer rationalen Funktion ihrer Elemente ist, gelangt man zu einem neuen Bildungsgesetz oben genannter Determinanten.

Es sei nämlich

$$(1.)\qquad D = \begin{vmatrix} a_1\, a_2 \dots a_{2m} \\ b_1\, b_2 \dots b_{2m} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ p_1\, p_2 \dots p_{2m} \\ q_1\, q_2 \dots q_{2m} \end{vmatrix} = \Sigma \pm a_1\, b_2 \dots p_{2m-1}\, q_{2m},$$

so ist auch, mag m ungerade oder gerade sein:

$$(2.)\qquad D=\begin{vmatrix} +q_1 & +q_2 & \cdots & +q_{2m} \\ -p_1 & -p_2 & \cdots & -p_{2m} \\ + & & & \\ - & & & \\ \vdots & & & \\ +b_1 & +b_2 & \cdots & +b_{2m} \\ -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{2m} \end{vmatrix}=D';$$

das Resultat der Multiplikation der beiden Determinanten D' mit D ergebe:

$$(3.)\qquad D^2=D'D=\Sigma\pm\alpha_{11}\alpha_{22}\ldots\alpha_{nn};\qquad (n=2m)$$

darin ist

$$\alpha_{11}=a_1q_1-b_1p_1\pm\cdots+p_1b_1-q_1a_1=0,$$
$$\alpha_{12}=a_1q_2-b_1p_2\pm\cdots+p_1b_2-q_1a_2,$$
$$\alpha_{21}=a_2q_1-b_2p_1\pm\cdots+p_2b_1-q_2a_1=-\alpha_{12},$$

und ebenso überhaupt

$$(4.)\qquad \alpha_{\varkappa\lambda}=a_\varkappa q_\lambda-b_\varkappa p_\lambda\pm\cdots+p_\varkappa b_\lambda-q_\varkappa a_\lambda,\qquad \binom{\varkappa=1,2,\ldots n}{\lambda=1,2,\ldots n}$$

also

$$(5.)\qquad \alpha_{\varkappa\varkappa}=0,\quad \alpha_{\varkappa\lambda}=-\alpha_{\lambda\varkappa},$$

also mit Benutzung der üblichen Bezeichnung für die *Pfaff-Jacobi*sche Funktion:

$$(6.)\qquad D^2=(1,2,3,\ldots 2m)^2.$$

Was nun das Zeichen von D betrifft, so ist das letzte Glied der Funktion $(1,2,\ldots 2m)$:

$$\alpha_{1,2m}\,\alpha_{2,2m-1}\cdots\alpha_{m,m+1};$$

der erste Faktor desselben $\alpha_{1,2m}$ enthält den Summand a_1q_{2m}, der zweite

Faktor enthält den Summand $-b_2 p_{2m-1}$ usw., der letzte Faktor den Summand $(-1)^{m+1} f_m g_{m+1}$, wenn f, g die in der Mitte der Buchstabenreihe $a, b, \ldots f, g, \ldots p, q$ stehenden Buchstaben sind; daher kommt unter den Summanden des Gliedes $a_{1,2m} \cdots a_{m,m+1}$ auch (abgesehen vom Vorzeichen) das Produkt $a_1 b_2 \cdots f_m g_{m+1} \cdots p_{2m-1} q_{2m}$ vor, *und nirgends anderswo*, und das Vorzeichen dieses Produktes ist für ungerades m: $(-1)^{\frac{m-1}{2}}$, für gerades m: $(-1)^{\frac{m}{2}}$, was man in $(-1)^{\frac{m(m-1)}{2}}$ zusammenziehen kann: Da nun in D das Diagonalglied $a_1 b_2 \cdots p_{2m-1} q_{2m}$ ist, so folgt aus (6.):

$$D = (-1)^{\frac{m(m-1)}{2}} (1, 2, 3, \ldots 2m). \tag{7.}$$

Von der Bequemlichkeit dieser Methode möge man sich etwa bei einer in reinen Zahlen gegebenen Determinante 4. Ordnung gegenüber der Zerlegung in 4 Determinanten 3. Ordnung überzeugen.

§ 2.

Als Beispiel eignet sich der Beweis eines Satzes von *Glaisher* über die *Zirkulanten* (oder kyklischen Determinanten*), doch schicken wir einen Satz über halbsymmetrische Determinanten voraus:

Wenn diejenigen Elemente $a_{\varkappa\lambda}$ einer halbsymmetrischen Determinante $(2m)$-ter Ordnung $V = \Sigma \pm a_{11} a_{22} \cdots a_{2m,2m}$, bei denen die Summe der Indizes $\varkappa + \lambda$ eine gerade Zahl ist, verschwinden, so läßt sich dieselbe durch eine Determinante m-ter Ordnung ausdrücken, nämlich

$$V = (1, 2, 3, \ldots, 2m) = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{14} & \cdots & a_{1,2m} \\ a_{32} & a_{34} & & a_{3,2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{2m-1,2} & a_{2m-1,4} & & a_{2m-1,2m} \end{vmatrix} = R_{(2m)}. \tag{8.}$$

Beweis. Sind u und i ungerade, g und p gerade Zahlen und $u < i$, $g < p$, so ist, da der Voraussetzung nach $a_{ui} = 0$,

---

*) Siehe *Pascals* Determinanten, Leipzig 1900, S. 73 ff. Herr *Pascal*, dem ich die Gleichung (7.) und ihren Beweis privatim mitgeteilt hatte, war so freundlich, mir einen Beweis zu schicken, den er auf die *Laplace*sche Regel gegründet hat.

$$(9.)\qquad (u,g,i,p) = a_{ug}\,a_{ip} + a_{up}\,a_{gi} = \begin{vmatrix} a_{ug} & a_{up} \\ a_{ig} & a_{ip} \end{vmatrix}.$$

Bezeichnen wir ferner die *Pfaff*sche Funktion $2m$-ter Ordnung $(1,2,\cdots 2m)$ mit $P(2m)$ und die *Pfaff*schen Funktionen $(2m-2)$-ter Ordnung in folgender Art:

$$(k, k+1, \ldots 2m, 2, 3 \ldots k-2) = P_k \qquad {\scriptstyle (k=3,5,\ldots 2m+1)}$$

(Kyklos$=2, 3, \ldots 2m, 2$; also $(2m+1)$-kyklisch$=2$), dann ist, wie bekannt, da a_{13}, a_{15} usw. verschwinden,

$$(10.)\quad (1,2,\ldots 2m) = a_{12}\,P_3 + a_{14}\,P_5 + \cdots + a_{1,2m-2}\,P_{2m-1} + a_{1,2m}\,P_{2m+1};$$

und ordnen wir irgend ein P_k (k als ungerade gedacht) so um, daß abwechselnd eine ungerade und eine gerade Zahl auf einander folgen, und sowohl die ungeraden Zahlen unter sich, wie die geraden Zahlen unter sich steigende Reihen bilden, wodurch P_k in N_k übergehe, so überzeugt man sich leicht, daß gemäß den Regeln betreffs der Vertauschung von Zahlen in der *Pfaff*schen Funktion

$$(11.)\ N_k = (3,2,5,4,\ldots k-2, k-3, k, k+1, \ldots 2m-1, 2m) = (-1)^{\frac{k-3}{2}} P_k$$

wird; somit ist

$$(12.)\ (1,2,\ldots 2m) = a_{12}\,N_3 - a_{14}\,N_5 \pm \cdots + (-1)^{m-2} N_{2m-1} + (-1)^{m-1} N_{2m+1}$$

wobei insbesondere

$$P_{2m+1} = (2,3,\ldots 2m-2, 2m-1),\ N_{2m+1} = (3,2,5,4,\ldots 2m-1, 2m-2).$$

Nun ist durch (9.) bewiesen, daß

$$P(4) = (1,2,3,4) = R_{(4)};$$

somit sind (unter Hinzufügung oberer Indizes zur Bezeichnung der Ordnung) für $m=3$, $N_3^4=(3,4,5,6)$, $N_5^4=(3,2,5,6)$, $N_7^4=(3,2,5,4)$ Partial-Determinanten aus $R_{(6)}$, und somit nach (12.)

$$P(6) = a_{12} N_3^4 - a_{14} N_5^4 + a_{16} N_7^4 = R_{(6)};$$

folglich sind für $m=4$:

$$N_3^6 = (3,4,5,6,7,8),\quad N_5^6 = (3,2,5,6,7,8),$$
$$N_7^6 = (3,2,5,4,7,8),\quad N_9^6 = (3,2,5,4,7,6)$$

Partial-Determinanten aus $R_{(8)}$ und daher nach (12.) wieder

$$P(8) = a_{12} N_3^6 \mp \cdots - a_{18} N_9^6 = R_{(8)},$$

und in gleicher Art ist der Beweis allgemein zu führen.

§ 3.

Die Voraussetzung des vorigen Satzes trifft, nach der Umformung gemäß (4.), bei den *Zirkulanten gerader Ordnung* zu, d. h. bei Determinanten der Form:

$$(13.)\qquad C_{2m} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \ldots a_{2m-1} & a_{2m} \\ a_2 & a_3 & a_4 \ldots a_{2m} & a_1 \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ a_{2m} & a_1 & a_2 \ldots a_{2m-2} & a_{2m-1} \end{vmatrix}.$$

Hier ist nach der durch Gleichung (4.) dargestellten Regel

$$(14.)\qquad a_{1,2k+1} = \{a_1 a_{2k} - a_2 a_{2k-1} + a_3 a_{2k-2} \mp \cdots - a_{2k} a_1\}$$
$$+ \{a_{2k+1} a_{2m} - a_{2k+2} a_{2m-1} \pm \cdots + a_{2m-1} a_{2k+2} - a_{2m} a_{2k+1}\} = 0,$$

ebenso ist bei zyklischer Verschiebung

$$(15.)\qquad a_{h,2k+h} = 0.$$

Hingegen ist

$$(16.)\quad a_{1,2k} = \sum_{h=1}^{2k-1} (-1)^{h-1} a_h a_{2k-h} + \sum_{h=2k}^{2m} (-1)^{h-1} a_h a_{2m+2k-h}$$

und weiter

$$(17.)\quad a_{1+r,2k-r} = (-1)^r \left\{ \sum_{h=1+r}^{2k-1} (-1)^{h-1} a_h a_{2k-h} + \sum_{h=2k}^{2m} (-1)^{h-1} a_h a_{2m+2k-h} + \sum_{h=1}^{r} (-1)^{h-1} a_h a_{2k-h} \right\} = (-1)^r a_{1,2k}$$

Im besonderen ist

$$(18.)\quad a_{1+m,2k-m} = (-1)^m a_{1,2k}, \qquad (2k > m)$$

$$(19.)\quad a_{\varkappa,\lambda} = -a_{\varkappa+1,\lambda-1} = a_{\varkappa+2,\lambda-2} \text{ usw.,}$$

d. h. der Wert eines Gliedes $a_{\varkappa\lambda}$ bleibt ungeändert, wenn man den einen der beiden Indizes um eine gerade Zahl erhöht und den andern um dieselbe Zahl vermindert, und noch

$$(20.)\quad a_{\varkappa+\varepsilon m,\lambda+\varepsilon' m} = (-1)^m a_{\varkappa,\lambda},$$

worin ε und ε' gleich $+1$ oder -1 und voneinander unabhängig sind. Hieraus folgt, daß alle Elemente $a_{\varkappa\lambda}$ gleich einem (oder dem im Zeichen entgegengesetzten) Element der Reihe

$$(21.)\quad a_{12},\ a_{23},\ a_{34},\ \ldots\ a_{m,m+1}$$

sind. Infolge der Gleichung (15.) ist nun (mit Rücksicht auf (7.) und (8.)).

$$(22.)\quad (-1)^{\frac{m(m-1)}{2}} C_{2m} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{14} & a_{16} & \ldots & a_{1,2m} \\ a_{32} & a_{34} & a_{36} & \ldots & a_{3,2m} \\ a_{52} & a_{54} & a_{56} & \ldots & a_{5,2m} \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ a_{\nu 2} & a_{\nu 4} & a_{\nu 6} & \ldots & a_{\nu,2m} \end{vmatrix}. \qquad (\nu = 2m-1)$$

Betrachten wir diese Determinante näher, so sehen wir *erstens*, daß die Diagonale bei ungeradem m aus den Elementen

$$a_{12}\,a_{34}\,a_{56}\ldots a_{m,m+1}\,a_{m+2,m+3}\ldots a_{2m-1,2m},$$

bei geradem m aus den Elementen

$$a_{12}\,a_{34}\,a_{56}\ldots a_{m-1,m}\,a_{m+1,m+2}\ldots a_{2m-1,2m}$$

besteht, welche man gemäß (20.) im ersten Fall durch

$$a_{12}\,a_{34}\ldots a_{m,m+1}\,a_{32}\,a_{54}\ldots a_{m,m-1},$$

im zweiten Fall durch

$$a_{12}\,a_{34}\ldots a_{m-1,m}\,a_{12}\,a_{34}\ldots a_{m-1,m}$$

ersetzen kann; — *zweitens*, daß die Elemente, welche auf einer der Nebendiagonale parallelen Linie stehen, wegen (19.) einander gleich sind.

Im speziellen ist irgendeine Zeile der Determinante in (22.) von der Form

$$a_{2h+1,2}\,a_{2h+1,4}\ldots a_{2h+1,2h}\,a_{2h+1,2h+2}\ldots a_{2h+1\;2m},$$

statt dessen kann man nach (19.) setzen für ungerades h:

$$a_{h+2,h+1}\,a_{h+2,h+3}\,a_{h+4,h+3}\ldots a_{2h+1,2h}\ldots;$$

für gerades h:

$$a_{h+1,h+2}\,a_{h+3,h+2}\,a_{h+3,h+4}\ldots a_{2h+1,2h}\ldots.$$

Dabei ist, wenn *beide* Indizes größer als m werden, die Gleichung (20.) anzuwenden, nämlich

$$a_{m+\varkappa,m+\lambda}=\begin{cases} a_{\varkappa\lambda} & \text{für gerades } m\\ a_{\lambda\varkappa} & \text{für ungerades } m.\end{cases}$$

Das Schlußglied ist für $h=0$ (1. Zeile der Determinante) bei geradem m:

$a_{m+1,m}$, bei ungeradem m: $a_{m,m+1}$; ist $h>0$ und gerade, so ist dasselbe $a_{h+1,h}$, für ungerades h: $a_{h,h+1}$. Die letzte Zeile ($h=m-1$) ist für ungerades m:

$$a_{m,m+1}, a_{m+2,m+1} = a_{12}, a_{32}, a_{34}, \dots a_{m,m-1},$$

für gerades m:

$$a_{m+1,m}, a_{m+1,m+2} = a_{12}, a_{32}, a_{34}, \dots a_{m-1,m}.$$

Infolge dieser Bemerkungen *erweist sich die Determinante in* (22.) *als Zirkulante* in Übereinstimmung mit dem *Glaisher*schen Satz.

Wir haben z. B. für $m=5$ und $m=4$:

$$(23.) \qquad C_{10} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{32} & a_{34} & a_{54} & a_{56} \\ a_{32} & a_{34} & a_{54} & a_{56} & a_{12} \\ a_{34} & a_{54} & a_{56} & a_{12} & a_{32} \\ a_{54} & a_{56} & a_{12} & a_{32} & a_{34} \\ a_{56} & a_{12} & a_{32} & a_{34} & a_{54} \end{vmatrix}, \qquad C_8 = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{32} & a_{34} & a_{54} \\ a_{32} & a_{34} & a_{54} & a_{12} \\ a_{34} & a_{54} & a_{12} & a_{32} \\ a_{54} & a_{12} & a_{32} & a_{34} \end{vmatrix}.$$

§ 4.

Wir ziehen aus der ursprünglichen Form von C_{2m} in (22.) noch einen Schluß. Wir bilden die Summe der Elemente der ersten Spalte in (22.). Aus C_{2m} in (13.) folgt gemäß der Regel (4.) als 1. Glied von a_{12}: $a_1 a_1$, als 1. Glied von a_{32}: $a_3 a_1$, usw., daher als 1. Glied der Summe

$$S = a_{12} + a_{32} + a_{52} + \cdots + a_{2m-1,2}$$

dieses: $(a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{2m-1}) a_1$; ebenso ist die Summe der 3.Glieder von S:

$$(a_3 + a_5 + \cdots + a_{2m-1} + a_1) a_{2m-1} \text{ oder } (a_1 + a_3 + \cdots + a_{2m-1}) a_{2m-1}$$

usw., also die Summe aller Glieder mit positivem Vorzeichen:

$$(a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{2m-1})^2;$$

in ganz ähnlicher Weise ergibt sich die Summe der 2., 4., ... $2m$-ten Glieder in S:

$$=-(a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{2m})^2,$$

folglich ist

$$(24.)\quad S=(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{2m})(a_1-a_2+a_3-a_4\pm\cdots-a_{2m}).$$

Nun ist aber die Summe der Elemente der anderen Spalten ebenfalls gleich S, wie aus dem Anblick von (23.) deutlich zu sehen; schreiben wir also statt der Elemente der 1. Zeile in (22.) die Summe der Elemente der betreffenden Spalten, so können wir S vorziehen und dadurch den Grad der Determinante um eine Einheit erniedrigen. Da aber bei dem Übergang von (22.) zu (23.) keine Umformung eingetreten ist, sondern die Elemente der Determinante nur andere Bezeichnungen erhalten haben, so können wir, der Anschaulichkeit wegen bei den Beispielen bleibend, die erwähnte Prozedur auch in der Form (23.) der Determinante vornehmen und erhalten dadurch:

$$C_{10}=S\begin{vmatrix} a_{34}-a_{32} & a_{54}-a_{34} & a_{56}-a_{54} & a_{12}-a_{56} \\ a_{54}-a_{34} & a_{56}-a_{54} & a_{12}-a_{56} & a_{32}-a_{12} \\ a_{56}-a_{54} & a_{12}-a_{56} & a_{32}-a_{12} & a_{34}-a_{32} \\ a_{12}-a_{56} & a_{32}-a_{12} & a_{34}-a_{32} & a_{54}-a_{34} \end{vmatrix},$$

$$C_8=S\begin{vmatrix} a_{34}-a_{32} & a_{54}-a_{34} & a_{12}-a_{54} \\ a_{54}-a_{34} & a_{12}-a_{54} & a_{32}-a_{12} \\ a_{12}-a_{54} & a_{32}-a_{12} & a_{34}-a_{32} \end{vmatrix}.$$

Was endlich die Elemente a_{12}, a_{23} usw. selbst anbetrifft, so ist

$$a_{12}=a_1^2+(-1)^m a_{m+1}^2-2(a_2a_{2m}-a_3a_{2m-1}+a_4a_{2m-2}\mp\cdots+(-1)^m a_m a_{m+2}),$$

und die andern a_{23}, a_{34}, usw. folgen hieraus durch zyklische Erhöhung aller Indizes um je eine, bzw. je zwei Einheiten usw.

§ 5.

Die Determinanten in C_{10} und C_8 sind Spezialfälle der *Hankel*schen Determinante*)

$$(25.)\qquad H=\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \cdots b_{n-2} & b_{n-1} \\ b_2 & b_3 \cdots b_{n-1} & b_n \\ b_3 & b_4 \cdots b_n & b_1 \\ b_4 & b_5 \cdots b_1 & b_2 \\ b_{n-1} & b_n \cdots b_{n-4} & b_{n-3} \end{vmatrix},$$

nämlich solche, bei denen die Summe der n im allgemeinen voneinander verschiedenen Elemente $b_1+b_2+\cdots+b_n$ verschwindet. Eine solche läßt sich durch Umkehrung der vorhin angewandten Prozedur auf eine zirkulare Determinante n-ter Ordnung zurückführen, was für ein gerades n zu empfehlen ist, sie läßt sich aber auch direkt behandeln. Da jedoch die Methode ähnlich derjenigen bei der Auswertung der allgemeinen zirkularen Determinanten ist, so möge hier nur das Resultat angegeben werden.

Bezeichnen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{n-1}$ die Wurzeln der Gleichung

$$(26.)\qquad \frac{x^n-1}{x-1}=0$$

und setzen wir

$$(27.)\qquad \psi(\alpha)=b_1+b_2\alpha+b_3\alpha^2+\cdots+b_n\alpha^{n-1},$$

wobei

$$(28.)\qquad 0=b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n$$

vorausgesetzt wird, so ist die obige spezielle *Hankel*sche Determinante $(n-1)$-ter Ordnung:

$$(29.)\qquad H=\frac{(-1)^{\frac{(n+2)(n-1)}{2}}}{n}\cdot\psi(\alpha_1)\psi(\alpha_2)\ldots\psi(\alpha_{n-1}).$$

---

*) Siehe *Pascal,* Determinanten S. 67.

Z. B. ist für $n=5$ und bei Einführung der Bezeichnungen

$$L_1=(b_2+b_5)^2+(b_2 b_4-b_3 b_4+b_3 b_5),$$

$$L_2=(b_3+b_4)^2+(b_2 b_3-b_2 b_5+b_4 b_5)$$

die Determinante

$$H=\begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ b_3 & b_4 & b_5 & b_1 \\ b_4 & b_5 & b_1 & b_2 \end{vmatrix}=-(L_1^2+3\,L_1\,L_2+L_2^2).$$

Nouvelles applications des paramètres continus à la théorie des formes quadratiques.

Deuxième Mémoire.

Recherches sur les parallélloèdres primitifs.

Par M. *Georges Voronoï* à Varsovie.

Introduction.

Les méthodes connues de réduction des formes quadratiques positives binaires, ternaires et quaternaires*) reposent sur une propriété des formes quadratiques positives, à savoir:

Chaque forme quadratique positive $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j$ *à n variables possède dans l'ensemble E composé de tous les systèmes* $(x_1, x_2, \dots x_n)$ *de valeurs entières des variables* $x_1, x_2, \dots x_n$ *n minima consécutifs*

$$M_1 \leqq M_2 \leqq \cdots \leqq M_n$$

déterminés à condition que le déterminant ω *d'un système*

$$(1.) \qquad (l_{11}, l_{21}, \dots l_{n1}),\ (l_{12}, l_{22}, \dots l_{n2}), \dots (l_{1n}, l_{2n}, \dots l_{nn})$$

de représentations de ces minima dans l'ensemble E ne s'annule pas.

*) *Lagrange*, Recherches d'Arithmétique. (Oeuvres, t. III, p. 695.)
Gauß, Disquisitiones arithmeticae. (Oeuvres, t. I, art. 171, p. 146).
Lejeune-Dirichlet, Über die Reduktion der positiven quadratischen Formen mit drei unbestimmten ganzen Zahlen. (Oeuvres, t. II, p. 41.)
Minkowski, Sur la réduction des formes quadratiques positives quaternaires. (Comptes Rendus des séances de l'Académie de Paris, t. 96, p. 1205.)

Dans tous les cas où on a

$$\omega = \pm 1,$$

on peut transformer la forme quadratique donnée $\Sigma\Sigma a_{ij} x_i x_j$ en une forme équivalente à l'aide d'une substitution

$$x_i = \sum_{k=1}^{n} l_{ik} x'_k. \qquad (i=1, 2, \ldots n)$$

Dans la forme transformée $\Sigma\Sigma a'_{ij} x_i x_j$, on aura

$$a'_{kk} = M_k. \qquad (k=1, 2, \ldots n)$$

La forme obtenue $\Sigma\Sigma a'_{ij} x_i x_j$ s'appelle réduite d'après les minima consécutifs.

Les formes quadratiques positives binaires, ternaires et quaternaires peuvent être réduites d'après les minima consécutifs.*) L'algorithme à l'aide duquel on effectue la réduction de ces formes est fondé sur le théorème suivant.

Pour qu'une forme quadratique positive

$$f(x_1, x_2, \ldots x_n) = \Sigma\Sigma a_{ij} x_i x_j \qquad (n=2, 3, 4)$$

soit réduite d'après les minima consécutifs, il faut et il suffit qu'on ait les inégalités

$$(2.) \qquad f(x_1, x_2, \ldots x_{k-1}, 1, x_{k+1}, \ldots x_n) \geqq a_{kk} \qquad (k=1, 2, \ldots n)$$

et

$$(3.) \qquad a_{11} \leqq a_{22} \leqq \cdots \leqq a_{nn},$$

quelles que soient les valeurs entières des variables

$$x_1, \ldots x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots x_n. \qquad (k=1, 2, \ldots n)$$

---

*) *Korkine* et *Zolotareff*, Sur les formes quadratiques positives. (Mathematische Annalen, t. 6, p. 336 et t. 11, p. 242.)

En faisant

$$(4.)\qquad x_i = x_i' + \delta_i x_k' \text{ où } \delta_k = 0 \text{ et } i = 1, 2, \dots n, \qquad (k=1,2,\dots n)$$

on déterminera pour la forme donnée $f(x_1, x_2, \dots x_n)$ les nombres entiers $\delta_1, \dots \delta_{k-1}, \delta_{k+1}, \dots \delta_n$ à condition que la valeur correspondante $f(\delta_1, \dots \delta_{k-1}, 1, \delta_{k+1}, \dots \delta_n)$ soit la plus petite possible. En faisant successivement $k = 1, 2, \dots n$ et en répétant le procédé exposé, on transformera toujours la forme donnée à l'aide d'une série de substitutions (4.) en une forme qui ne diffère de la forme réduite que par une permutation des coefficients ($n = 2, 3, 4$).

Le procédé exposé dans le cas général ne peut être non plus prolongé indéfiniment et on arrivera toujours à une forme quadratique équivalente $\Sigma\Sigma a_{ij}' x_i x_j$ qui vérifie les inégalités (2.) et (3.), mais on ne connaît pas, à partir du nombre des variables $n > 4$, si les coefficients a_{kk}' ($k = 1, 2, \dots n$) dans la forme obtenue présentent un système de minima consécutifs, de plus: on ne connaît même pas, si la réduction de chaque forme quadratique positive d'après les minima consécutifs est possible.

On se débarrasse de la difficulté signalée par le changement de la notion du système de n minima consécutifs en ne considérant que les systèmes (1.) qui vérifient l'équation

$$\omega = \pm 1.$$

C'est la méthode connue d'*Hermite**) qui a été récemment reprise par M. *Minkowski* dans le mémoire intitulé: „Diskontinuitätsbereich für arithmetische Äquivalenz"**).

En partant comme M. *Minkowski* de la même base: des travaux de *Lejeune-Dirichlet* et d'*Hermite* concernant les formes quadratiques positives, j'ai travaillé pendant douze ans dans un autre champ de recherches, étudiant les propriétés des systèmes de nombres entiers qui représentent le minimum de la forme

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_i x_j + 2 \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$$

---

*) *Hermite*, Extraits de lettres à Jacobi sur différents objets de la théorie des nombres. (Ce Journal, t. 40, p. 302.)

**) Ce Journal, t. 129, p. 220.

dans l'ensemble E, la forme quadratique $\Sigma\Sigma a_{ij}x_ix_j$ étant positive et $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ les paramètres arbitraires quelconques.

Dans le cas $n=2$, le problème posé a été résolu par *Lejeune-Dirichlet* et par *Hermite**).

En réfléchissant aux principes qui ont servi de base dans ces recherches à ces deux illustres géomètres, j'ai observé que le problème énoncé est intimement lié au problème de la réduction des formes quadratiques positives.

En effet, *Lejeune-Dirichlet* et *Hermite* ont démontré le théorème suivant.

Les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'inégalité

$$ax^2+2bxy+cy^2+2\alpha x+2\beta y \geqq 0$$

subsiste, quelles que soient les valeurs entières de x et y, se ramènent en général à six inégalités

$$(5.)\quad \begin{cases} al^2+2blm+cm^2 \pm 2(\alpha l+\beta m) \geqq 0, \\ al'^2+2bl'm'+cm'^2 \pm 2(\alpha l'+\beta m') \geqq 0, \\ al''^2+2bl''m''+cm''^2 \pm 2(\alpha l''+\beta m'') \geqq 0, \end{cases}$$

où les systèmes de nombres entiers

$$(l, m), (l', m') \text{ et } (l'', m'')$$

ne dépendent que des coefficients de la forme quadratique (a, b, c).

En envisageant les paramètres α et β comme les coordonnées cartésiennes d'un point (α, β) du plan, on déterminera par les inégalités (5.) un hexagone P qui est formé de trois paires d'arêtes parallèles. L'étude des propriétés de l'hexagone P joue un rôle important dans les recherches de *Lejeune-Dirichlet* qui a indiqué deux propriétés fondamentales de l'hexagone P.

I. *Il existe un groupe de translations de l'hexagone P à l'aide desquelles tout le plan sera couvert par les hexagones congruents.*

II. *Chaque forme quadratique positive binaire peut être transformée en une forme équivalente (a, b, c) satisfaisant aux conditions*

$$(6.)\quad a-b \geqq 0,\ b \geqq 0,\ c-b \geqq 0.$$

*) *Lejeune-Dirichlet*, Mémoire cité.

Hermite, Sur la théorie des formes quadratiques ternaires. (Ce Journ., t. 40, p. 178.)

L'hexagone P correspondant à la forme (a, b, c), dans le cas

$$a-b>0,\ b>0,\ c-b>0,$$

est caractérisé par les systèmes

$$(7.)\qquad (1,0),\ (0,1),\ (1,-1).$$

Dans les cas $a-b=0$, ou $b=0$, ou $c-b=0$, l'hexagone P se réduit à un parallélogramme.

Les inégalités (6.) définissent un domaine D de formes quadratiques binaires qui est parfaitement déterminé par les systèmes (7.).

A l'aide de la substitution

$$x=x',\ y=-y',$$

on transformera le domaine D en un domaine D' défini par les inégalités

$$(8.)\qquad a+b\geqq 0,\ -b\geqq 0,\ c+b\geqq 0$$

qui est caractérisé par les systèmes

$$(1,0),\ (0,1),\ (1,1).$$

On appelle réduites d'après *Selling* les formes quadratiques positives binaires qui vérifient les inégalités (8.)*).

En effectuant toutes les transformations du domaine D à l'aide des substitutions

$$x=px'+qy',\ y=p'x'+q'y'$$

à coefficients entiers et à déterminant ± 1, on obtient un ensemble (D) des domaines de formes quadratiques binaires.

L'ensemble (D) des domaines partage uniformément l'ensemble de toutes les formes quadratiques positives binaires, c'est-à-dire: une forme qui

*) *Selling*, Über die binären und ternären quadratischen Formen. (Ce Journal, t. 77, p. 143.)

est intérieure à un domaine quelconque D de l'ensemble (D) n'appartient à aucun autre domaine de cet ensemble; une forme qui est intérieure à une face du domaine D n'appartient qu'à un autre domaine de l'ensemble (D) qui est contigu au domaine D par cette face.

Les résultats exposés m'ont amené à un nouveau point de vue sur le problème de réduction des formes quadratiques positives.

Le problème de réduction des formes quadratiques positives consiste en une partition uniforme de l'ensemble des formes quadratiques positives à l'aide des domaines de formes, déterminés à l'aide des inégalités linéaires et jouissant de la propriété que chaque substitution à coefficients entiers et à déterminant ± 1 *ne change pas l'ensemble* (D) *de ces domaines. En partageant l'ensemble* (D) *en classes de domaines équivalents et en choisissant les représentants de toutes les classes*

$$D, D_1, \ldots D_{m-1}, \tag{9.}$$

on appellera réduites les formes quadratiques qui appartiennent à ces domaines.

On pourrait ajouter les conditions supplémentaires aux domaines (9.) en demandant: 1.) que $m = 1$, 2.) que les formes quadratiques positives qui sont intérieures au domaine D ne soient pas équivalentes et enfin, 3.) que le nombre des inégalités linéaires qui définissent le domaine D soit le plus petit possible.

J'espère revenir une autre fois au problème posé de la réduction des formes quadratiques positives.

Dans ce mémoire, je me borne à l'étude des domaines de formes quadratiques qu'on obtient en généralisant les résultats exposés des recherches de *Lejeune-Dirichlet* et d'*Hermite* pour les formes quadratiques positives à un nombre quelconque de variables.

L'hexagone de *Lejeune-Dirichlet* peut être remplacé pour les formes quadratiques positives à n variables par un polyèdre convexe de l'espace analytique à n dimensions.

Pour une forme quadratique positive $\Sigma\Sigma a_{ij} x_i x_j$, le polyèdre correspondant R présente un ensemble des points (α_i) vérifiant l'inégalité

$$\Sigma\Sigma a_{ij} x_i x_j + 2\,\Sigma \alpha_i x_i \geqq 0 \tag{10.}$$

dans l'ensemble E. Le polyèdre R peut être déterminé à l'aide des inégalités indépendantes

$$\Sigma\Sigma a_{ij}\, l_{ik}\, l_{jk} \pm 2\,\Sigma \alpha_i\, l_{ik} \geqq 0, \qquad (k=1,2,\ldots\tau)$$

dont le nombre 2τ ne dépasse par une limite

$$2\tau \leqq 2(2^n-1).$$

Les systèmes de nombres entiers

$$(11.) \qquad \pm(l_{11}, l_{21}, \ldots l_{n1}), \pm(l_{12}, l_{22}, \ldots l_{n2}), \ldots \pm(l_{1\tau}, l_{2\tau}, \ldots l_{n\tau})$$

définissent par les équations correspondantes

$$\Sigma\Sigma a_{ij}\, l_{ik}\, l_{jk} \pm 2\,\Sigma \alpha_i\, l_{ik} = 0$$

2τ faces à $n-1$ dimensions du polyèdre R. Comme ces faces se partagent en τ paires de faces parallèles, j'appelle parallèloèdre le polyèdre R correspondant à une forme quadratique positive quelconque.

Les systèmes (11.) jouissent de plusieurs propriétés importantes.

1. *Pour qu'un système* $(l_1, l_2, \ldots l_n)$ *appartienne à la série* (11.), *il faut et il suffit que deux systèmes* $(l_1, l_2, \ldots l_n)$ *et* $(-l_1, -l_2, \ldots -l_n)$ *soient les seules représentations du minimum de la forme* $\Sigma\Sigma a_{ij} x_i x_j$ *dans l'ensemble composé de tous les systèmes de nombres entiers qui sont congrus au système* $(l_1, l_2, \ldots l_n)$ *par rapport au module* 2, *le système* $l_1=0,\ l_2=0, \ldots l_n=0$ *étant exclu.*

2. *Parmi les systèmes* (11.) *se trouvent toutes les représentations du minimum arithmétique de la forme quadratique positive* $\Sigma\Sigma a_{ij} x_i x_j$.

3. *Parmi les systèmes* (11.) *se trouvent tous les systèmes* (1.) *qui représentent n minima consécutifs de la forme* $\Sigma\Sigma a_{ij} x_i x_j$.

4. *Tous les déterminants qu'on peut former de n systèmes quelconques appartenant à la série* (11.) *ne dépassent pas en valeur numérique une limite* $n!$.

En désignant par le symbole S_ν le nombre de faces à ν dimensions $(\nu=0, 1, 2, \ldots n-1)$ d'un parallèloèdre R, j'ai trouvé que

$$S_\nu \leqq (n+1-\nu)\, \Delta^{(n-\nu)}(m^n)_{m=1}. \qquad (\nu=0,1,2,\ldots n-1)$$

En faisant $\nu = 0$ dans cette inégalité, on obtient

$$S_0 \leqq (n+1)!,$$

donc le nombre des sommets d'un parallélloèdre R ne dépasse pas une limite $(n+1)!$. En faisant $\nu = n-1$, on obtient

$$S_{n-1} \leqq 2(2^n - 1).$$

Je démontre dans ce mémoire qu'il existe des parallélloèdres pour lesquels le symbole S_ν s'exprime par la formule

$$S_\nu = (n+1-\nu)\,\Delta^{(n-\nu)}(m^n)_{m=1}. \qquad (\nu = 0, 1, 2, \dots n-1)$$

Tous ces parallélloèdres sont primitifs.

La notion des parallélloèdres primitifs joue un rôle important dans mes recherches.

Je suis arrivé à la notion des parallélloèdres primitifs en observant que les parallélloèdres possèdent la propriété I des hexagones de *Lejeune-Dirichlet*, à savoir:

I. *Il existe un groupe de translations d'un parallélloèdre R à l'aide desquelles on remplit uniformément l'espace analytique à n dimensions par les parallélloèdres congruents.*

Désignons par (R) l'ensemble des parallélloèdres qui sont définis par l'inégalité

$$\Sigma\Sigma a_{ij} x_i x_j + 2\Sigma \alpha_i x_i \geqq \Sigma\Sigma a_{ij} l_i l_j + 2\Sigma \alpha_i l_i,$$

$l_1, l_2, \dots l_n$ étant des nombres entiers arbitraires. Chaque système (l_i) de nombres entiers caractérise un parallélloèdre de l'ensemble (R).

Je démontre que l'ensemble (R) des parallélloèdres correspondant aux différents systèmes (l_i) de nombres entiers remplit uniformément l'espace à n dimensions.

Le groupe correspondant de translations du parallélloèdre R défini par les inégalités (10.) est composé de vecteurs $[\lambda_i]$ qui sont déterminés par les égalités

$$\lambda_i = -\sum_{k=1}^{n} a_{ik} l_k, \qquad (i=1,2,\ldots n)$$

$l_1, l_2, \ldots l_n$ étant des nombres entiers arbitraires.

Chaque sommet (α_i) des parallélloèdres de l'ensemble (R) appartient au moins à $n+1$ parallélloèdres. J'appelle simple un sommet (α_i) qui n'appartient qu'à $n+1$ parallélloèdres de l'ensemble (R) et j'établis une notion de parallélloèdre primitif commme il suit:

On appelle parallélloèdre primitif un parallélloèdre dont tous les sommets sont simples.

Tous les parallélloèdres qui ne sont pas primitifs sont dits imprimitifs. A ce point de vue, l'hexagone de *Lejeune-Dirichlet* présente un parallélloèdre primitif et chaque parallélogramme est un parallélloèdre imprimitif à deux dimensions.

Chaque parallélloèdre imprimitif est une limite des parallélloèdres primitifs et peut être envisagé comme un cas de dégénérescence des parallélloèdres primitifs.

Je partage les parallélloèdres primitifs en types différents en caractérisant un type de parallélloèdres primitifs par un ensemble (L) de simplexes corrélatifs aux différents sommets des parallélloèdres qui appartiennent à l'ensemble (R).

Un sommet pareil (α_i) est détérminé par $n+1$ équations

$$\Sigma\Sigma a_{ij} l_{ik} l_{jk} + 2\Sigma \alpha_i l_{ik} = A. \qquad (k=0,1,2,\ldots n)$$

A $n+1$ systèmes de nombres entiers

$$(l_{1k}, l_{2k}, \ldots l_{nk}), \qquad (k=0,1,2,\ldots n)$$

je fais correspondre un simplexe L en le définissant comme un ensemble de points qui sont déterminés par les égalités

$$x_i = \sum_{k=0}^{n} \vartheta_k l_{ik}, \text{ où } \sum_{k=0}^{n} \vartheta_k = 1 \text{ et } \vartheta_k \geqq 0. \qquad (k=0,1,2,\ldots n,\ i=1,2,\ldots n)$$

L'ensemble (L) des simplexes qui sont corrélatifs aux sommets de l'ensemble (R) de parallélloèdres primitifs jouit de propriétés importantes.

1. *L'ensemble* (L) *de simplexes partage uniformément l'espace à n dimensions.*

2. *En effectuant les différentes translations d'un simplexe de l'ensemble* (L) *le long des vecteurs* $[l_i]$ *qui sont déterminés par les nombres entiers arbitraires* $l_1, l_2, \dots l_n$, *on obtient une classe de simplexes congruents qui appartiennent à l'ensemble* (L).

3. *Le nombre des simplexes incongruents de l'ensemble* (L) *est fini.*

La propriété II des hexagones de *Lejeune-Dirichlet* pour les parallélloèdres primitifs peut être généralisée comme il suit:

II. *Toutes les formes quadratiques qui définissent les parallélloèdres primitifs appartenant au type caractérisé par l'ensemble* (L) *de simplexes sont intérieures à un domaine de formes quadratiques à* $\frac{n(n+1)}{2}$ *dimensions défini par des inégalités linéaires.*

J'obtiens les inégalités linéaires qui définissent un domaine D de formes quadratiques correspondant à un ensemble (L) de simplexes en examinant les arêtes incongruentes des parallélloèdres primitifs appartenant au type caractérisé par l'ensemble (L) de simplexes.

Chaque sommet (α_i) des parallélloèdres primitifs de l'ensemble (R) appartient à $n+1$ arêtes $[\alpha_i, \alpha_{ik}]$ de ces parallélloèdres $(k=0,1,2,\dots n)$.

En posant

$$\alpha_{ik} - \alpha_i = p_{ik}\,\varrho_k, \qquad (i=1,2,\dots n;\ k=0,1,2,\dots n)$$

on peut déterminer le paramètre positif ϱ_k, de manière que les nombres $p_{1k}, p_{2k}, \dots p_{nk}$ soient entiers et ne possèdent pas de diviseur commun. Je démontre que le paramètre ϱ_k s'exprime par une fonction linéaire

$$(12.)\qquad \varrho_k = \Sigma\Sigma p_{ij}^{(k)} a_{ij}$$

des coefficients de la forme quadratique donnée $\Sigma\Sigma a_{ij}x_i x_j$, les coefficients

$$p_{ij}^{(k)} = p_{ji}^{(k)}, \qquad (i=1,2,\dots n;\ j=1,2,\dots n)$$

étant rationnels.

J'appelle régulateur de l'arête $[\alpha_i, \alpha_{ik}]$ la fonction ϱ_k déterminée par la formule (12.); le système (p_{ik}) est dit caractéristique de l'arête

$$[\alpha_i, \alpha_{ik}]. \qquad (k=0,1,2,\dots n)$$

Comme l'arête $[\alpha_i, \alpha_{ik}]$ est corrélative à une face P_k à $n-1$ dimensions du simplexe L qui est corrélatif au sommet (α_i), j'appelle la fonction (12.) *régulateur de la face* P_k et le système $\pm(p_{ik})$ *caractéristique de la face* P_k *du simplexe* L $(k=0, 1, 2, \ldots n)$.

En désignant par

$$\varrho_k \text{ et } \pm(p_{ik}), \qquad (k=1, 2, \ldots \sigma)$$

les régulateurs et les caractéristiques de toutes les faces incongruentes à $n-1$ dimensions de l'ensemble (L) de simplexes, je démontre le théorème important suivant:

Le domaine de formes quadratiques qui est caractérisé par l'ensemble (L) *de simplexes est défini par les inégalités linéaires*

$$\varrho_k = \Sigma\Sigma p_{ij}^{(k)} a_{ij} \geqq 0. \qquad (k=1, 2, \ldots \sigma)$$

Tous les domaines de formes quadratiques que j'ai étudiés dans ce mémoire possèdent une propriété remarquable: ils sont des domaines simples, c'est-à-dire le nombre des inégalités indépendantes qui les définissent est égal à $\frac{n(n+1)}{2}$.

Une autre coïncidence a attiré depuis longtemps mon attention: c'est la relation qui existe entre les résultats exposés dans ce mémoire et ceux qui ont été obtenus dans mon premier mémoire intitulé: „Sur quelques propriétés des formes quadratiques positives parfaites"*). J'ai observé que l'ensemble de caractéristiques $\pm(p_{ik}), k=1, 2, \ldots \sigma$ n'est autre chose que l'ensemble de toutes les représentations du minimum d'une forme quadratique parfaite φ. Le domaine D ou bien coïncide avec le domaine R correspondant à la forme parfaite φ, ou bien présente une partie de ce domaine.

Malgré tous mes efforts, je n'ai pas réussi à découvrir le lien qui rattache les deux problèmes exposés et qui semblent être si différents, abstraction faite d'une formule remarquable

$$\Sigma\Sigma a_{ij} x_i x_j = \frac{1}{(n-1)!} \sum_{k=1}^{\sigma} \varrho_k \omega_k (p_{1k} x_1 + p_{2k} x_2 + \cdots + p_{nk} x_n)^2$$

qui fournit l'expression d'une forme quadratique arbitraire $\Sigma\Sigma a_{ij} x_i x_j$ en fonction des régulateurs $\varrho_k (k=1, 2, \ldots \sigma)$ qui sont déterminés par la formule (12.).

*) Ce Journal, t. 133, p. 97.

Dans cette formule $\omega_k (k=1,2,\ldots\sigma)$ sont des nombres entiers positifs qui ne dépendent que des faces correspondantes des simplexes de l'ensemble (L).

Aux différents types de parallélloèdres primitifs correspond un ensemble (D) des domaines de formes quadratiques. L'ensemble (D) partage uniformément l'ensemble de toutes les formes quadratiques positives à n variables.

J'expose dans ce mémoire un algorithme à l'aide duquel on peut déterminer tous les domaines de formes qui sont contigus à un domaine de l'ensemble (D) par les faces à $\frac{n(n+1)}{2}-1$ dimensions. Cet algorithme se ramène à une certaine reconstruction de l'ensemble (L) de simplexes en un autre ensemble (L').

L'ensemble (D) des domaines de formes se transforme en soi-même par toutes les substitutions à coefficients entiers et à déterminant ± 1. En partageant l'ensemble (D) en des classes de domaines équivalents, on obtient à l'aide de l'algorithme exposé les représentants

$$D, D_1, \ldots D_{m-1}$$

des classes différentes de domaines appartenant à l'ensemble (D).

En appelant réduites les formes quadratiques qui appartiennent aux domaines obtenus, on établit une méthode nouvelle de réduction des formes quadratiques positives.

J'ai appliqué la théorie générale exposée à l'étude des deux types de parallélloèdres primitifs de l'espace à n dimensions qui correspondent au domaine principal des formes quadratiques et aux domaines qui sont contigus au domaine principal par les faces à $\frac{n(n+1)}{2}-1$ dimensions. Le domaine principal est défini par les inégalités

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} \geqq 0, \qquad (i=1,2,\ldots n)$$

$$-a_{ij} \geqq 0. \qquad (i=1,2,\ldots n;\ j=1,2,\ldots n;\ i \neq j)$$

J'étudie en détail les parallélloèdres de l'espace à 2, 3 et 4 dimensions.

Dans l'espace à 2 dimensions, il n'existe qu'un seul type de parallélloèdres primitifs, à condition qu'on ne considère pas comme différents les types équivalents; c'est l'hexagone de *Lejeune-Dirichlet*.

L'ensemble (D) des domaines est composé dans ce cas d'une seule classe dont le représentant est le domaine principal défini par les inégalités (8.).

Dans l'espace à 2 dimensions, il n'existe qu'une seule espèce de parallèloèdres imprimitifs — c'est le parallélogramme.

Dans l'espace à 3 dimensions, il n'existe qu'un seul type de parallèloèdres primitifs — c'est un polyèdre à 14 faces dont 8 sont hexagonales et 6 sont parallélogrammatiques.

L'ensemble (D) des domaines est composé dans ce cas d'une seule classe dont le représentant est le domaine principal. En appelant réduite une forme quadratique positive ternaire $ax^2+a'y^2+a''z^2+2byz+2b'zx+2b''xy$ qui appartient au domaine principal déterminé à l'aide des inégalités

$$a+b'+b''\geqq 0,\ a'+b''+b\geqq 0,\ a''+b+b'\geqq 0,\ -b\geqq 0,\ -b'\geqq 0,\ -b''\geqq 0,$$

on arrivera à la méthode de réduction des formes quadratiques positives ternaires due à *Selling**).

Dans l'espace à 3 dimensions, il existe 4 espèces de parallèloèdres imprimitifs, ce sont: 1.) le parallélopipède, 2.) le prisme à base hexagonale, 3.) le dodécaèdre parallélogrammatique et 4.) le dodécaèdre à 4 faces hexagonales et à 8 faces parallélogrammatiques.

Dans l'espace à 4 dimensions, il existe trois types de parallèloèdres primitifs. L'ensemble (D) des domaines est composé de trois classes de domaines de formes quadratiques quaternaires.

J'ai déterminé les trois représentants de ces classes

$$D,\ D',\ D''.$$

En appelant réduites les formes quadratiques positives quaternaires qui appartiennent aux domaines D, D' et D'', je suis arrivé à une modification de la méthode de réduction des formes quadratiques positives quaternaires due à M. *Charve**).

Jusqu'à présent, je n'ai considéré que les parallèloèdres qui sont définis par les formes quadratiques positives.

On peut envisager le problème de partition uniforme de l'espace analytique à n dimensions par des polyèdres convexes congruents indépendamment de la théorie des formes quadratiques.

---

*) *Selling*, Mémoire cité.

**) *Charve*, De la réduction des formes quadratiques quaternaires positives (Comptes-Rendus des séances de l'Academie de Paris, t. 92, p. 782 et Annales de l'École Normale supérieure, 2e série, t. XI, p. 119).

En appelant parallélоèdre chaque polyèdre convexe qui jouit de la propriété I, je démontre le remarquable théorème suivant.

En effectuant toutes les transformations linéaires possibles a l'aide du groupe continu de substitutions

$$x_i = \alpha_{i0} + \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} x'_k \qquad (i=1,2,\dots n)$$

à coefficients réels quelconques d'un parallélоèdre primitif, on obtient un ensemble de parallélоèdres primitifs qui est parfaitement déterminé par une classe de formes quadratiques positives équivalentes, à condition qu'on ne considère pas comme différentes les formes quadratiques à coefficients proportionnels.

En vertu de ce théorème, le problème de partition uniforme de l'espace à n dimensions par des parallélоèdres primitifs congruents se ramène toujours à l'étude des parallélоèdres primitifs correspondant aux formes quadratiques positives.

Je suis porté à croire, sans pouvoir le démontrer, que le théorème énoncé est aussi vrai pour les parallélоèdres imprimitifs.

Les parallélоèdres de l'espace à 2 et à 3 dimensions ont été étudiés par M. *Fedorow**) qui a découvert à l'aide de considérations purement géométriques l'existence de deux espèces de parallélоèdres dans l'espace à 2 dimensions et l'existence de cinq espèces de parallélоèdres dans l'espace à 3 dimensions. M. *Fedorow* a démontré qu'il n'existe pas d'autres parallélоèdres dans l'espace à 2 et à 3 dimensions.

Les parallélоèdres à 3 dimensions de M. *Fedorow* jouent un rôle important dans la théorie de la structure des cristaux**).

---

*) *Fedorow*, Éléments de la théorie des figures. St. Pétersbourg, 1885 (*en russe*). *Fedorow*, Reguläre Plan- und Raumteilung. (Abhandlungen der K. bayer. Akademie der Wiss., II Cl., XX Bd. II Abt. München, 1899.)

Voyez aussi: *Minkowski*, Allgemeine Lehrsätze über die convexen Polyeder. (Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathem.-physikalische Klasse, 1897, p. 198.)

**) Voyez: *Fedorow*, Cours de la Cristallographie. St. Pétersbourg, 1901 (*en russe*).
Soret, Cristallographie physique. Genève, 1894.
Schönflies, Kristallsysteme und Kristallstruktur. Leipzig, 1891.
Sommerfeldt, Physikalische Kristallographie. Leipzig, 1907.

Première partie.

Partition uniforme de l'espace analytique à *n* dimensions à l'aide des translations d'un même polyèdre convexe.

Section I.

Propriétés générales des paralléloèdres.

Sur les polyèdres convexes à n dimensions.

1. On appellera point de l'espace analytique à n dimensions chaque système $(x_1, x_2, \dots x_n)$, ou simplement (x_i), des valeurs réelles des variables $x_1, x_2, \dots x_n$.

Envisageons un système d'inégalités linéaires

$$(1.) \qquad a_{0k} + \sum_{i=1}^{n} a_{ik}\, x_i \geqq 0 \qquad (k=1,2,\dots\sigma)$$

à coefficients réels quelconques.

On dira que l'ensemble R des points vérifiant les inégalités (1.) est à n dimensions, s'il existe des points satisfaisant aux conditions

$$a_{0k} + \Sigma a_{ik}\, x_i > 0. \qquad (k=1,2,\dots\sigma)$$

On les appellera points intérieurs à l'ensemble R.

*Principe fondamental**). *Pour que l'ensemble R des points vérifiant les inégalités* (1.) *soit à n dimensions, il faut et il suffit que l'équation*

$$\varrho_0 + \sum_{k=1}^{\sigma} \varrho_k (a_{0k} + \Sigma a_{ik}\, x_i) = 0$$

*) Le principe énoncé ne diffère que par la formulation du principe fondamental exposé dans mon premier mémoire intitulé: Sur quelques propriétés des formes quadratiques positives parfaites. (Ce Journal, t. 133, p. 113.)

ne se réduise pas à une identité tant que tous les paramètres $\varrho_0, \varrho_1, \ldots \varrho_\sigma$ *sont positifs ou nuls.*

Définition I. *On appellera polyèdre convexe chaque ensemble des points vérifiant un système d'inégalités linéaires, à condition que cet ensemble soit borné et à n dimensions.*

2. Admettons que les inégalités (1.) définissent un polyèdre convexe R **et supposons que toutes les inégalités (1.) soient indépendantes. Dans ce cas, le polyèdre** R **possède** σ **faces à** $n-1$ **dimensions qui sont définies par les équations correspondantes**

$$a_{0k} + \Sigma a_{ik} x_i = 0. \qquad (k=1,2,\ldots\sigma)$$

Définition II. *Supposons qu'un point* (α_i) *appartenant à* R *vérifie les équations*

$$(2.) \qquad a_{0r} + \Sigma a_{ir} x_i = 0, \qquad (r=1,2,\ldots\mu)$$

et qu'on ait les inégalités

$$a_{0k} + \Sigma a_{ik} \alpha_i > 0. \qquad (k=\mu+1,\ldots\sigma)$$

Désignons par ν *le nombre des dimensions de l'ensemble* $P(\nu)$ *composé des points appartenant à* R *et vérifiant les équations* (2.). *On appellera face à* ν *dimensions du polyèdre* R *l'ensemble* $P(\nu)$ $(\nu = 0, 1, 2, \ldots n-1)$.

Dans le cas $\nu = 1$, **on appellera arête du polyèdre** R **une face** $P(1)$ **et dans le cas** $\nu = 0$, **on appellera sommet du polyèdre** R **une face** $P(0)$.

Pour plus de généralité dans les notations, on désignera par le symbole $P(n)$ **le polyèdre** R **lui-même.**

Sous cette restriction, on peut énoncer la proposition suivante:

Chaque point appartenant au polyèdre R *est intérieur à une face* $P(\nu)$ *de ce polyèdre, où* $\nu = 0, 1, 2, \ldots n$.

3. Supposons que le polyèdre R **possède** s **sommets**

$$(\alpha_{i1}), (\alpha_{i2}), \ldots (\alpha_{is}).$$

Désignons par

$$(\alpha_{i1}), (\alpha_{i2}), \ldots (\alpha_{im})$$

tous les sommets de R **qui vérifient les équations (2.).**

*Théorème**). *La face $P(\nu)$ à ν dimensions $(\nu = 0, 1, 2, \ldots n)$ du polyèdre R définie par les équations* (2.) *présente un ensemble de points déterminés à l'aide des égalités*

$$x_i = \sum_{r=1}^{m} \vartheta_r \alpha_{ir} \text{ où } \Sigma \vartheta_r = 1 \text{ et } \vartheta_r \geqq 0. \qquad (r=1,2,\ldots m)$$

Ensemble des domaines à n dimensions correspondant aux différents sommets d'un polyèdre convexe.

4. Supposons qu'un sommet (α_i) du polyèdre R soit déterminé par les équations

$$(1.) \qquad a_{0k} + \Sigma a_{ik} x_i = 0. \qquad (k=1,2,\ldots \mu)$$

Définition. On appellera domaine correspondant au sommet (α_i) l'ensemble A des points déterminés à l'aide des égalités

$$(2.) \qquad x_i = \sum_{k=1}^{\mu} \varrho_k a_{ik} \text{ où } \varrho_k \geqq 0. \qquad (k=1,2,\ldots \mu)$$

Désignons par

$$(3.) \qquad A_1, A_2, \ldots A_s$$

les domaines correspondant aux différents sommets

$$(\alpha_{i1}), (\alpha_{i2}), \ldots (\alpha_{is})$$

du polyèdre R. En vertu de la définition établie, l'ensemble (3.) de domaines jouit des propriétés suivantes:

I. *Tous les domaines de l'ensemble* (3.) *sont à n dimensions.*

Admettons que le domaine A déterminé par les égalités (2.) ne soit pas à n dimensions.

Tous les points (x_i) appartenant au domaine A vérifieront au moins une équation linéaire

$$\Sigma p_i x_i = 0.$$

---

*) Voyez mon mémoire cité, n° 12.

En vertu de (2.), on aura

$$\Sigma p_i a_{ik} = 0. \qquad (k=1,2,\ldots \mu) \tag{4.}$$

Comme les équations (1.) définissent un sommet (α_i) du polyèdre R, on trouvera parmi les systèmes

$$(a_{11}, \ldots a_{n1}),\ (a_{12}, \ldots a_{n2}), \ldots (a_{1\mu}, \ldots a_{n\mu})$$

n systèmes dont le déterminant ne s'annule pas; il s'ensuit que les égalités (4.) sont impossibles.

II. *Chaque point de l'espace à n dimensions appartient au moins à un domaine de l'ensemble* (3.).

Soit (a_i) un point arbitraire. Examinons les sommes

$$\Sigma a_i \alpha_{ik}, \qquad (k=1,2,\ldots s)$$

et supposons que la plus petite somme $\Sigma a_i \alpha_i$ corresponde au sommet (α_i) défini par les équations (1.). On aura les inégalités

$$\Sigma a_i \alpha_{ik} \geqq \Sigma a_i \alpha_i. \qquad (k=1,2,\ldots s)$$

En vertu du théorème du n° 3, on obtient

$$\Sigma a_i x_i \geqq \Sigma a_i \alpha_i,$$

quel que soit un point (x_i) appartenant au polyèdre R.

On en conclut que les inégalités

$$\Sigma a_i \alpha_i - \Sigma a_i x \geqq 0 \ \text{ et } \ a_{0k} + \Sigma a_{ik} x_i \geqq 0 \qquad (k=1,2,\ldots \sigma)$$

ne peuvent pas définir un polyèdre à n dimensions et, en vertu du principe fondamental du n° 1, on aura une identité

$$\varrho_0 + \varrho(\Sigma a_i \alpha_i - \Sigma a_i x_i) + \sum_{k=1}^{\sigma} \varrho_k (a_{0k} + \Sigma a_{ik} x_i) = 0,$$

où

$$\varrho_0 \geqq 0,\ \varrho \geqq 0,\ \varrho_k \geqq 0. \qquad (k=1,2,\ldots \sigma)$$

En faisant $x_i = \alpha_i$ dans cette identité, il viendra

$$\varrho_0 + \sum_{k=1}^{\sigma} \varrho_k (a_{0k} + \Sigma a_{ik} \alpha_i) = 0,$$

et comme d'après la supposition faite

$$a_{0k} + \Sigma a_{ik} \alpha_i > 0$$

tant que $k = \mu + 1, \dots \sigma$, il est nécessaire que

$$\varrho_0 = 0, \ \varrho_{\mu+1} = 0, \ \dots \ \varrho_\sigma = 0,$$

donc

$$\varrho (\Sigma a_i \alpha_i - \Sigma a_i x_i) + \sum_{k=1}^{\mu} \varrho_k (a_{0k} + \Sigma a_{ik} x_i) = 0.$$

On en tire

$$a_i = \sum_{k=1}^{\mu} \frac{\varrho_k}{\varrho} a_{ik} \text{ où } \frac{\varrho_k}{\varrho} \geqq 0, \qquad (k=1,2,\dots \mu)$$

donc le point (a_i) appartient au domaine A.

III. *Un point qui est intérieur à une face $A(\nu)$ $(\nu = 0, 1, 2, \dots n)$ d'un domaine quelconque de l'ensemble* (3.) *n'appartient qu'aux domaines de l'ensemble* (3.) *qui sont contigus par la face $A(\nu)$.*

Admettons que le point (a_i) soit intérieur à une face $A(\nu)$ du domaine A.

En désignant par

$$(a_{i1}), (a_{i2}), \dots (a_{i\tau}), \ \tau \leqq \mu$$

les points qui caractérisent la face $A(\nu)$, on peut poser*)

$$a_i = \sum_{k=1}^{\tau} \varrho_k a_{ik} \text{ où } \varrho_k > 0. \qquad (k=1,2,\dots \tau)$$

Admettons que le point (a_i) soit intérieur à une autre face $A'(\nu')$ d'un domaine A' qui correspond à un sommet (α_i'). On peut poser

$$a_i = \sum_{h=1}^{\tau'} \varrho_h' a_{ih}' \text{ où } \varrho_h' > 0. \qquad (h=1,2,\dots \tau')$$

*) Voyez mon mémoire cité, nº 13.

En vertu de ces égalités, on aura une identité

$$(5.) \qquad \rho_0 + \sum_{k=1}^{\tau} \rho_k (a_{0k} + \Sigma a_{ik} x_i) = \sum_{h=1}^{\tau'} \rho'_h (a'_{0h} + \Sigma a'_{ih} x_i).$$

En faisant dans cette identité $x_i = \alpha_i$, on obtient

$$\rho_0 = \sum_{h=1}^{\tau'} \rho'_h (a'_{0h} + \Sigma a'_{ih} \alpha_i),$$

et il en résulte que

$$\rho_0 \geqq 0.$$

En faisant dans l'identité (5.) $x_i = \alpha'_i$, on obtient

$$\rho_0 + \sum_{k=1}^{\tau} \rho_k (a_{0k} + \Sigma a_{ik} \alpha'_i) = 0;$$

par suite $\rho_0 = 0$ et

$$a_{0k} + \Sigma a_{ik} \alpha'_i = 0. \qquad (k=1,2,\dots \tau)$$

De la même manière, on trouve

$$a'_{0h} + \Sigma a'_{ih} \alpha_i = 0. \qquad (h=1,2,\dots \tau')$$

On en conclut que les deux faces $A(\nu)$ et $A'(\nu')$ coïncident*).

En vertu des propriétés démontrées de l'ensemble (3.) de domaines, on dira que cet ensemble partage uniformément l'espace à n dimensions.

Définition du groupe des vecteurs.

5. *Définition* I. *On appellera vecteur l'ensemble des points déterminés à l'aide des égalités*

$$(1.) \qquad x_i = \alpha_i + u(\alpha_i' - \alpha_i) \quad \text{où} \quad 0 \leqq u \leqq 1,$$

(α_i) et (α_i') étant deux points quelconques différents.

On désignera le vecteur déterminé à l'aide des égalités (1.) par le symbole $[\alpha_i, \alpha'_i]$. Dans le cas $\alpha_i = 0$ $(i=1,2,\dots n)$, on désignera le vecteur correspondant par le symbole $[\alpha'_i]$ et on l'appellera vecteur du point (α'_i).

Définition II. *Supposons que*

$$(2.) \qquad [\lambda_{i1}], [\lambda_{i2}], \dots [\lambda_{im}]$$

*) Voyez mon mémoire cité, n° 20, p. 133.

soient les vecteurs des points arbitraires (λ_{i1}), $(\lambda_{i2}), \dots (\lambda_{im})$. *On appellera groupe de vecteurs l'ensemble G des vecteurs déterminés à l'aide des égalités*

$$\lambda_i = \sum_{k=1}^{m} l_k \lambda_{ik},$$

$l_1, l_2, \dots l_m$ *étant des nombres entiers arbitraires.*

On appellera base du groupe G de vecteurs les vecteurs (2.).

Translation des polyèdres.

6. *Définition. Effectuons une transformation linéaire d'un polyèdre R à l'aide d'une substitution*

$$(1.) \qquad x_i = x_i' - \lambda_i, \qquad (i=1,2,\dots n)$$

les coefficients $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n$ *étant arbitraires. On dira qu'on a effectué une translation du polyèdre R le long du vecteur* $[\lambda_i]$.

Supposons que le polyèdre R soit déterminé par les inégalités

$$a_{0k} + \Sigma a_{ik} x_i \geqq 0. \qquad (k=1,2,\dots \sigma)$$

Le polyèdre transformé R' sera déterminé, en vertu de (1.), par les inégalités

$$a_{0k} + \Sigma a_{ik}(x_i - \lambda_i) \geqq 0. \qquad (k=1,2,\dots \sigma)$$

On appellera congruents les polyèdres R et R'.

7. Soit G un groupe de vecteurs. En effectuant les translations différentes du polyèdre R le long des vecteurs appartenant au groupe G, on formera un ensemble (R) de polyèdres congruents.

On dira que l'ensemble (R) de polyèdres congruents partage uniformément l'espace à n dimensions aux conditions suivantes:

I. *Chaque point de l'espace à n dimensions appartient au moins à un polyèdre de l'ensemble (R).*

II. *Un point qui est intérieur à une face quelconque* $P(\nu)$ $(\nu = 0, 1, 2, \dots n)$ *d'un polyèdre de l'ensemble (R) n'appartient qu'aux polyèdres de l'ensemble (R) qui sont contigus par la face* $P(\nu)$.

Définition des parallélloèdres.

8. *Définition. On appellera parallélloèdre chaque polyèdre convexe R possédant un groupe G de translations à l'aide desquelles on peut remplir uniformément l'espace à n dimensions par les polyèdres congruents au polyèdre R.*

En vertu de la définition établie, les parallélloèdres possèdent une propriété importante, à savoir:

En effectuant une transformation linéaire d'un parallélloèdre à l'aide d'une substitution à coefficients réels quelconques

$$x_i = \alpha_{i0} + \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} x'_k, \qquad (i=1,2,\dots n)$$

on obtient un polyèdre convexe qui est aussi un parallélloèdre.

Observons qu'en vertu de la définition établie, chaque parallélopipède de l'espace à n dimensions est un parallélloèdre.

Propriétés du groupe de vecteurs d'un parallélloèdre.

9. Supposons qu'un parallélloèdre R soit défini par les inégalités

$$(1.) \qquad a_{0k} + \Sigma a_{ik} x_i \geqq 0. \qquad (k=1,2,\dots \sigma)$$

Désignons par G le groupe du parallélloèdre R et supposons que le groupe G possède la base

$$(2.) \qquad [\lambda_{i1}], \ [\lambda_{i2}], \dots [\lambda_{im}].$$

Tous les vecteurs qui forment la base du groupe G ne peuvent pas vérifier une même équation linéaire

$$\Sigma p_i \lambda_i = 0,$$

puisqu' autrement l'ensemble (R) des parallélloèdres congruents correspondant au groupe G ne remplirait pas l'espace à n dimensions.

On en conclut que parmi les vecteurs (2.) se trouvent n vecteurs

$$[\lambda_{i1}],\ [\lambda_{i2}], \dots [\lambda_{in}] \tag{3.}$$

dont le déterminant $\pm \Delta$ ne s'annule pas; on les appellera indépendants.

Théorème I. *La valeur numérique Δ du déterminant de n vecteurs indépendants possède une limite*

$$\Delta \geqq \int_{(R)} dx_1\, dx_2 \dots dx_n.$$

Soit (α_i) un point quelconque qui est intérieur au parallélloèdre R. Introduisons dans nos recherches un parallélopipède K déterminé à l'aide des égalités

$$x_i = \alpha_i + \sum_{k=1}^{n} u_k \lambda_{ik}, \qquad (i=1,2,\dots n) \tag{4.}$$

où

$$-\delta \leqq u_k \leqq \delta. \qquad (k=1,2,\dots n) \tag{5.}$$

On peut choisir le paramètre positif δ, de manière que tous les points du parallélloèdre R défini par les inégalités (1.) appartiennent au parallélopipède K.

Prenons un nombre entier positif m et déterminons $(m+1)^n$ systèmes $(l_1, l_2, \dots l_n)$ de nombres entiers vérifiant les inégalités

$$0 \leqq l_k \leqq m. \qquad (k=1,2,\dots n) \tag{6.}$$

Désignons par

$$\lambda_i^{(h)} = \sum_{k=1}^{n} l_k^{(h)} \lambda_{ik}, \qquad (h=1,2,\dots (m+1)^n) \tag{7.}$$

$(m+1)^n$ vecteurs correspondants appartenant au groupe G.

En effectuant les translations du parallélloèdre R le long des vecteurs (7.), on obtient $(m+1)^n$ parallélloèdres différents de l'ensemble (R):

$$R^{(h)}. \qquad (h=1,2,\dots (m+1)^n) \tag{8.}$$

Désignons par H un parallélopipède qui est déterminé par les égalités

$$x_i = \alpha_i + \sum_{k=1}^{n} u_k \lambda_{ik}, \qquad (i=1,2,\dots n) \tag{9.}$$

où

$$-\delta \leqq u_k \leqq m + \delta. \qquad (k=1,2,\dots n) \tag{10.}$$

Je dis que tous les points des parallélloèdres (8.) appartiennent au parallélopipède H. En effet, soit $(x_i^{(h)})$ un point quelconque du parallélloèdre $R^{(h)}$ $(h = 1, 2, \dots (m+1)^n)$. En posant

$$x_i = x_i^{(h)} - \lambda_i^{(h)}, \qquad (i=1,2,\dots n) \tag{11.}$$

on obtient un point (x_i) appartenant au parallélloèdre R qui est congruent au point donné $(x_i^{(h)})$. En vertu de (4.), (7.) et (11.), on obtient

$$x_i^{(h)} = \alpha_i + \sum_{k=1}^{n} (l_k + u_k) \lambda_{ik},$$

et à cause de (5.) et (6.), il vient

$$-\delta \leqq l_k + u_k \leqq m + \delta, \qquad (k=1,2,\dots n)$$

donc le point $(x_i^{(h)})$ appartient au parallélopipède H.

Il s'ensuit que

$$\int_{(H)} dx_1\, dx_2 \dots dx_n \geqq \sum_h \int_{(R^h)} dx_1\, dx_2 \dots dx_n. \qquad (h=1,2,\dots (m+1)^n)$$

En observant que

$$\int_{(H)} dx_1\, dx_2 \dots dx_n = \Delta (m + 2\delta)^n$$

et que

$$\int_{(R^h)} dx_1\, dx_2 \dots dx_n = \int_{(R)} dx_1\, dx_2 \dots dx_n, \qquad (h=1,2,\dots (m+1)^n)$$

on obtient

$$\Delta (m + 2\delta)^n \geqq (m+1)^n \int_{(R)} dx_1\, dx_2 \dots dx_n.$$

En faisant croître indéfiniment le nombre m, on trouve

$$\Delta \geqq \int_{(R)} dx_1 dx_2 \dots dx_n.$$

10. *Théorème* II. *Le groupe G des vecteurs d'un parallélloèdre possède une base formée de n vecteurs indépendants.*

Désignons par G' un groupe de vecteurs ayant la base (3.). Il peut arriver que les deux groupes G et G' coïncident. Dans ce cas n vecteurs (3.) présentent une base du groupe G.

En admettant le contraire, on aura parmi les vecteurs (2.) au moins un vecteur $[\lambda'_i]$ qui n'appartient pas au groupe G'. En posant

$$\lambda'_i = \sum_{k=1}^{n} l'_k \lambda_{ik},$$

on aura parmi les nombres $l'_1, l'_2, \dots l'_n$ au moins un nombre qui sera fractionnaire.

Désignons par $l_1, l_2, \dots l_n$ les nombres entiers vérifiant les inégalités

$$|l'_k - l_k| \leqq \frac{1}{2} \qquad (k=1,2,\dots n)$$

et supposons que $l'_r - l_r \neq 0$.

En désignant

$$\lambda'_{ik} = \lambda_{ik}, \ (k=1,2,\dots n,\ k \neq r) \quad \text{et} \quad \lambda'_{ir} = \lambda'_i - \Sigma l_k \lambda_{ik},$$

on obtient un système de n vecteurs indépendants

$$[\lambda'_{i1}],\ [\lambda'_{i2}], \dots [\lambda'_{in}]$$

appartenant au groupe G dont le déterminant $\pm \Delta'$ vérifie l'inégalité

$$0 < \Delta' \leqq \frac{1}{2} \Delta.$$

Le procédé exposé ne peut être prolongé indéfiniment, en vertu du théorème I, donc on obtiendra toujours un système de n vecteurs formant la base du groupe G.

11. *Théorème* III. *La valeur numérique Δ du déterminant d'un système de n vecteurs formant la base du groupe G s'exprime par la formule*

$$\Delta = \int_{(R)} dx_1\, dx_2 \ldots dx_n.$$

Supposons que le système (3.) de n vecteurs présente une base du groupe G.

Introduisons dans nos recherches un parallélopipède H' déterminé à l'aide des égalités

$$x_i = \alpha_i + \sum_{k=1}^{n} u_k \lambda_{ik}, \qquad (i=1,2,\ldots n) \tag{12.}$$

où

$$\delta \leq u_k \leq m - \delta. \qquad (k=1,2,\ldots n) \tag{13.}$$

Je dis que chaque point du parallélopipède H' appartient au moins à un des parallélloèdres (8.). En effet, soit (x'_i) un point quelconque du parallélopipède H'.

Désignons par R^0 un parallélloèdre de l'ensemble (R) auquel appartient le point (x'_i). Soit $[\lambda_i]$ le vecteur qui définit une translation du parallélloèdre R en R^0. En posant

$$x_i = x'_i - \lambda_i, \tag{14.}$$

on obtient un point (x_i) appartenant au parallélloèdre R qui est congruent au point (x'_i). En vertu de la supposition faite, le vecteur $[\lambda_i]$ peut être déterminé par les égalités

$$\lambda_i = \sum_{k=1}^{n} l_k \lambda_{ik}. \tag{15.}$$

Comme le point (x'_i) appartient au parallélopipède H', on présentera les égalités (14.), à cause de (12.) et (15.), sous la forme suivante:

$$x_i = \alpha_i + \sum_{k=1}^{n} (u_k - l_k) \lambda_{ik}.$$

Le point (x_i) appartenant au parallélloèdre R appartient aussi, en vertu de la supposition faite, au parallélopipède K déterminé par les égalités (4.), à condition de (5.). Il s'ensuit que

$$-\delta \leqq u_k - l_k < \delta, \qquad (k=1,2,\dots n)$$

et comme, à cause de (13.),

$$\delta \leqq u_k \leqq m - \delta, \qquad (k=1,2,\dots n)$$

il vient

$$0 < l_k \leqq m, \qquad (k=1,2,\dots n)$$

donc le vecteur $[\lambda_i]$ déterminé par les égalités (15.) se trouve parmi les vecteurs (7.) et le point examiné (x') du parallélopipède H' appartient à un parallélloèdre de la série (8.)

Il s'ensuit que

$$\int_{(H')} dx_1\, dx_2 \dots dx_n < \sum_h \int_{(R^h)} dx_1\, dx_2 \dots dx_n, \qquad (h=1,2,\dots(m+1)^n)$$

donc

$$\Delta(m-2\delta)^n \leqq (m+1)^n \int_{(R)} dx_1\, dx_2 \dots dx_n.$$

En faisant croître indéfiniment le nombre m, on obtient

$$\Delta \leqq \int_{(R)} dx_1\, dx_2 \dots dx_n.$$

En vertu du théorème I, il est nécessaire que

$$\Delta = \int_{(R)} dx_1\, dx_2 \dots dx_n.$$

Propriétés des faces à $n-1$ dimensions d'un parallélloèdre.

12. Supposons qu'un parallélloèdre R soit défini par les inégalités indépendantes

$$a_{0k} + \Sigma a_{ik} x_i > 0. \qquad (k=1,2,\dots\sigma)$$

Désignons par P_k $(k=1,2,\dots\sigma)$ les faces à $n-1$ dimensions du parallèloèdre R déterminées par les équations correspondantes

$$(1.)\qquad a_{0k}+\Sigma a_{ik}x_i=0. \qquad (k=1,2,\dots\sigma)$$

Soit (α_i) un point qui est intérieur à la face P_k. Examinons un parallélopipède K défini par les égalités

$$(2.)\qquad x_i=\alpha_i+u_i \text{ où } |u_i|\leqq\varepsilon. \qquad (i=1,2,\dots n)$$

On peut choisir un paramètre ε si petit qu'on aura les inégalités

$$(3.)\qquad a_{0r}+\Sigma a_{ir}x_i>0, \qquad (r=1,2,\dots\sigma, r\neq k)$$

quel que soit un point (x_i) du parallélopipède K. Il en résulte que tous les points du parallélopipède K vérifiant l'inégalité

$$(4.)\qquad a_{0k}+\Sigma a_{ik}x_i\geqq 0$$

appartiennent au parallèloèdre R. Comme le point (α_i) vérifie l'équation (1.), l'inégalité (4.) se réduit, à cause de (2.), à celle-ci

$$\Sigma a_{ik}u_i\geqq 0.$$

Je dis qu'on peut choisir une valeur du paramètre ε si petite que tous les points du parallélopipède K vérifiant l'inégalité

$$\Sigma a_{ik}u_i\leqq 0$$

appartiendront à un autre parallèloèdre R_k de l'ensemble (R). On démontrera aisément la proposition énoncée en s'appuyant sur les propriétés démontrées du groupe G de vecteurs.

Deux parallélloèdres R et R_k sont contigus par la face P_k à $n-1$ dimensions.

Désignons par $[\lambda_{ik}]$ le vecteur qui définit une translation du parallélloèdre R_k en R.

La face P_k qui est définie dans le parallélloèdre R par l'équation (1.) sera définie dans le parallélloèdre R_k par l'équation

$$-a_{0k} - \Sigma a_{ik} x_i = 0. \tag{5.}$$

En effectuant une translation de la face P_k le long du vecteur $[\lambda_{ik}]$, on obtient une autre face P_k du parallélloèdre R qui sera dans ce parallélloèdre déterminée par l'équation

$$-a_{0k} - \Sigma a_{ik}(x_i - \lambda_{ik}) = 0.$$

On appellera parallèles les faces P_k et P'_k du parallélloèdre R.

Nous sommes arrivés au résultat important suivant:

Toutes les faces à $n-1$ dimensions d'un parallélloèdre peuvent être partagées en paires de faces parallèles.

13. Désignons par

$$R_1,\ R_2,\ \dots\ R_\sigma$$

tous les parallélloèdres qui sont contigus au parallélloèdre R par les faces $P_1, P_2, \dots P_\sigma$. Désignons par

$$[\lambda_{i1}],\ [\lambda_{i2}],\ \dots [\lambda_{i\sigma}] \tag{6.}$$

les vecteurs correspondants.

En vertu de la définition du parallélloèdre, les vecteurs (6.) forment la base du groupe G. Parmi les vecteurs de ce groupe se trouvent les systèmes de n vecteurs qui forment une base du groupe G.

Faces congruentes à différentes dimensions d'un parallélloèdre.

14. Supposons qu'une face $P(\nu)$ à ν dimensions d'un parallélloèdre R appartienne aussi aux parallélloèdres $R_1, R_2, \dots R_\tau$ de l'ensemble (R).

Soit (α_i) un point qui est intérieur à la face $P(\nu)$. On peut déterminer une valeur positive du paramètre ε, de manière que tous les points du parallélopipède K défini par les égalités

$$x_i = \alpha_i + u_i \text{ où } |u_i| \leqq \varepsilon \qquad (i=1,2,\dots n)$$

appartiennent aux parallélloèdres $R, R_1, R_2, \dots R_\tau$.

Désignons par $[\lambda_{ik}]$ les vecteurs le long desquels on effectuera les translations des parallélloèdres R_k en R $(k=1,2,\dots\tau)$.

En effectuant les translations de la face $P(\nu)$ le long des vecteurs $[\lambda_{ik}]$ $(k=1,2,\dots\tau)$, on obtient les faces nouvelles

$$P'(\nu), P''(\nu), P^{(\tau)}(\nu)$$

du parallélloèdre R.

Définition I. *On appellera congruentes les faces du parallélloèdre* R

$$P(\nu),\ P'(\nu), \dots P^{(\tau)}(\nu)$$

à ν *dimensions* $(\nu = 0, 1, 2 \dots n-1)$.

15. *Théorème. Le nombre des parallélloèdres de l'ensemble* (R) *qui sont contigus par une même face à* ν *dimensions ne peut être inférieur à* $n+1-\nu$ $(\nu = 0, 1, 2, \dots n-1)$.

Supposons que la face $P(\nu)$ soit déterminée dans le parallélloèdre R par les équations

$$(1.) \qquad a_{0r} + \Sigma a_{ir} x_i = 0. \qquad (r=1,2,\dots\mu)$$

Désignons par $R_1, R_2, \dots R_\mu$ les parallélloèdres qui sont contigus à R par les faces à $n-1$ dimensions définies par les équations (1.). La face $P(\nu)$ appartiendra à tous les parallélloèdres $R_1, R_2, \dots R_\mu$, donc

$$\tau \geqq \mu.$$

Comme la face $P(\nu)$ est à ν dimensions, il est nécessaire que

$$\mu \geqq n-\nu,$$

et par suite

$$\tau \geqq n - \nu .$$

16. *Définition* II. *On appellera simple une face à ν dimensions qui n'appartient qu'à $n+1-\nu$ parallélloèdres de l'ensemble (R).*

Définition III. *On appellera primitif un parallélloèdre dont toutes les faces à différentes dimensions sont simples.*

Les parallélloèdres primitifs possèdent plusieurs propriétés importantes qui en simplifient l'étude.

Dans les recherches ultérieures, on n'étudiera que les parallélloèdres primitifs et tous les parallélloèdres imprimitifs qui peuvent être considérés comme une limite des parallélloèdres primitifs.

Je suis porté à croire que chaque parallélloèdre imprimitif peut être envisagé à ce point de vue, mais je n'ai pas réussi à le démontrer.

Section II.

Propriétés fondamentales des parallélloèdres primitifs.

Définition des parallélloèdres primitifs.

17. Nous avons appelé au n° 16 „parallélloèdre primitif" tout parallélloèdre dont toutes les faces à différentes dimensions sont simples.

Théorème I. *Pour qu'un parallélloèdre soit primitif il faut et il suffit que tous ses sommets soient simples.*

Le théorème énoncé est évident en vertu de la définition établie.

Théorème II. *Deux parallélloèdres primitifs appartenant à l'ensemble (R) ne peuvent être contigus que par une face à $n-1$ dimensions.*

Supposons qu'une face $P(\nu)$ à ν dimensions d'un parallélloèdre primitif R soit déterminée à l'aide de $n-\nu$ équations

$$(1.) \qquad a_{0r} + \Sigma a_{ir}\, x_i = 0. \qquad (r=1,2,\ldots n-\nu)$$

Désignons par $R_1, R_2, \ldots R_{n-\nu}$ les parallélloèdres qui sont contigus au parallélloèdre R par les faces à $n-1$ dimensions définies à l'aide des équations (1.). La face $P(\nu)$ n'appartiendra qu'aux parallélloèdres $R, R_1, \ldots R_{n-\nu}$, en vertu de la définition établie, donc le théorème énoncé est démontré.

Arêtes des parallélloèdres primitifs de l'ensemble (R).

18. Soit (α_i) un sommet du parallélloèdre primitif R déterminé par n équations

$$a_{0k} + \Sigma a_{ik} x_i = 0. \qquad (1.) \qquad (k=1,2,\ldots n)$$

Désignons par $R_1, R_2, \ldots R_n$ les parallélloèdres contigus au parallélloèdre R par les faces à $n-1$ dimensions déterminées à l'aide des équations (1.).

En vertu de la définition établie, le sommet (α_i) n'appartiendra qu'aux parallélloèdres $R_1, R_2, \ldots R_n$ de l'ensemble (R).

Déterminons n nombres $p_{1k}, p_{2k} \ldots p_{nk}$ à l'aide des équations

$$\Sigma a_{ir} p_{ik} = 0. \qquad (2.) \qquad (r=1,2,\ldots n;\ r \gtrless k;\ k=1,2,\ldots n)$$

Les équations (2.) ne définissent les nombres $p_{1k}, p_{2k}, \ldots p_{nk}$ qu' à un facteur commun près. Ajoutons aux équations (2.) une condition

$$\Sigma a_{ik} p_{ik} > 0 \qquad (3.) \qquad (k=1,2,\ldots n)$$

et envisageons un vecteur g_k déterminé à l'aide des égalités

$$x_i = \alpha_i + p_{ik}\varrho \quad \text{où} \quad \varrho \geqq 0.$$

En attribuant au paramètre ϱ des valeurs positives suffisamment petites, on déterminera, à cause de (3.), les points du vecteur g_k qui appartiennent à R.

Désignons par ϱ_k la limite supérieure des valeurs du paramètre ϱ qui définissent les points du vecteur g_k appartenant à R. En posant

$$\alpha_{ik} = \alpha_i + p_{ik}\varrho_k,$$

on déterminera un sommet (α_{ik}) du parallélloèdre R adjacent au sommet (α_i) par une arête $P_k(1)$ du parallélloèdre $R\,(k=1,2,\ldots n)$. On caractérisera l'arête $P_k(1)$ par le symbole $[\alpha_i, \alpha_{ik}]$.

Observons que tous les points de l'arête $P_k(1)$ vérifient $n-1$ équations

$$a_{0r} + \Sigma a_{ir} x_i = 0. \qquad (r=1,2,\ldots n;\ r \gtrless k)$$

Il s'ensuit que l'arête $P_k(1)$ appartient aux parallélloèdres

$$R, R_1 \ldots R_{k-1}, R_{k+1}, \ldots R_n \qquad (k=1, 2, \ldots n)$$

et en vertu de la définition établie, n'appartient à aucun autre parallélloèdre de l'ensemble (R).

On en conclut que les parallélloèdres

$$R_1, R_2, \ldots R_n$$

sont contigus par une arête aussi. En désignant cette arête par $P_0(1)$, on la déterminera par le symbole $[\alpha_i, \alpha_{i0}]$ en posant

$$\alpha_{i0} = \alpha_i + p_{i0}\varrho_0.$$

Nous sommes arrivés au résultat suivant:

Il existe $n+1$ arêtes des parallélloèdres de l'ensemble (R) contiguës par un même sommet de ces parallélloèdres.

Observons que $n-1$ arêtes

$$P_1(1), \ldots P_{k-1}(1), P_{k+1}(1), \ldots P_k(1) \qquad (k=1, 2, \ldots n)$$

définissent une face à $n-1$ dimensions qui est commune aux parallélloèdres R et R_k $(k=1, 2, \ldots n)$. Deux parallélloèdres R_k et R_h $(k=1, 2, \ldots n, h=1, 2, \ldots n)$ sont contigus par une face à $n-1$ dimensions qui est définie par $n-1$ arêtes

$$P_r(1). \qquad (r=0, 1, 2, \ldots n;\ r \neq k, r \neq h)$$

Forme canonique
des équations qui définissent un sommet d'un parallélloèdre primitif.

19. En conservant les notations précédentes, on peut déterminer le sommet (α_i) dans le parallélloèdre R à l'aide des équations

$$(1.) \qquad u_k(a_{0k} + \Sigma a_{ik} x_i) = 0, \qquad (k=1, 2, \ldots n)$$

$u_1, u_2, \ldots u_n$ étant des paramètres arbitraires positifs. On dira que l'équation

$$-u_k(a_{0k} + \Sigma a_{ik} x_i) = 0 \text{ où } u_k > 0$$

ne définit pas dans le parallélloèdre R une face à $n-1$ dimensions puisque l'inégalité

$$-u_k(a_{0k}+\Sigma a_{ik}x_i)\geqq 0$$

ne sera pas vérifiée par tous les points du parallélloèdre R.

Théorème. On peut déterminer les valeurs positives des paramètres $u_1, u_2, \dots u_n$ *à un facteur commun près, de manière qu'en posant*

$$a'_{0k}=u_k a_{0k},\quad a'_{ik}=u_k a_{ik}, \qquad (i=1,2,\dots n;\; k=1,2,\dots n)$$

on définira le sommet (α_i) *dans le parallélloèdre* R *par les équations*

$$\Sigma a'_{ik}(x_i-\alpha_i)=0, \qquad (k=1,2,\dots n) \tag{2.}$$

et on définira le sommet (α_i) *dans le parallélloèdre* R_k $(k=1,2,\dots n)$ *par les équations*

$$\left\{\begin{aligned} &\Sigma(a'_{ih}-a'_{ik})(x_i-\alpha_i)=0, \qquad (h=1,2,\dots n;\; h\neq k)\\ &-\Sigma a'_{ik}(x_i-\alpha_i)=0. \qquad (k=1,2,\dots n)\end{aligned}\right. \tag{3.}$$

Prenons un paramètre positif arbitraire δ et déterminons les paramètres $u_1, u_2, \dots u_n$, d'après les équations

$$u_k\Sigma a_{ik}(\alpha_i-\alpha_{i0})=\delta. \qquad (k=1,2,\dots n) \tag{4.}$$

Je dis que les valeurs obtenues de $u_1, u_2, \dots u_n$ satisfont aux conditions du théorème énoncé.

Pour le démontrer, observons en premier lieu que les équations (4.) définissent les valeurs positives de $u_1, u_2, \dots u_n$. En effet, nous avons vu au n°. 18 que l'arête $P_0(1)$ définie par les égalités

$$x_i=\alpha\;+u\,(\alpha_{i0}-\alpha_i) \text{ où } 0\leqq u\leqq 1 \tag{5.}$$

n'appartient qu'aux parallélloèdres $R_1, R_2, \dots R_n$. On en conclut qu'en attribuant au paramètre u une valeur négative quelconque, suffisamment petite, on déterminera par les égalités (5.) un point qui sera intérieur au parallélloèdre R. Il s'ensuit que

$$\Sigma a_{ik}(\alpha_i - \alpha_{i0}) > 0, \qquad (k=1,2,\dots n)$$

et les équations (4.) donnent

$$u_k > 0. \qquad (k=1,2,\dots n)$$

Cela posé, désignons par

$$(6.) \qquad \Sigma a_{ir}^{(k)}(x_i - \alpha_i) = 0 \qquad (r=1,2,\dots n)$$

les équations qui définissent le sommet (α_i) dans le paralléloèdre R_k $(k=1,2\dots n)$.

Observons que n arêtes $P_r(1)$ $(r=0,1,2\dots n, r \neq k)$ sont contiguës par le sommet (α_i) dans le paralléloèdre R_k. Chaque équation (6.) sera vérifiée par $n-1$ arêtes. On peut donc poser

$$(7.) \qquad \begin{cases} \Sigma a_{ik}^{(k)}(\alpha_{ir} - \alpha_i) = 0, & (r=1,2\dots n;\ r \neq k) \\ \Sigma a_{ik}^{(k)}(\alpha_{i0} - \alpha_i) > 0 \end{cases}$$

et

$$(8.) \qquad \begin{cases} \Sigma a_{ih}^{(k)}(\alpha_{ir} - \alpha_i) = 0, & (r=0,1,2,\dots n;\ r \neq k, r \neq h) \\ \Sigma a_{ih}^{(k)}(\alpha_{ih} - \alpha_i) > 0. & (h=1,2,\dots n;\ h \neq k) \end{cases}$$

Les conditions établies définissent les coefficients des équations (6.) à un facteur positif commun près, qui peut être choisi arbitrairement.

Observons que les coefficients des équations (1.), qui définissent le sommet (α_i) dans le paralléloèdre R, sont déterminés aussi à un facteur positif commun près et satisfont aux conditions

$$(9.) \qquad \begin{cases} \Sigma a_{ik}(\alpha_{ir} - \alpha_i) = 0, & (r=1,2,\dots n;\ r \neq k;\ k=1,2,\dots n) \\ \Sigma a_{ik}(\alpha_{ik} - \alpha_i) > 0. & (k=1,2,\dots n) \end{cases}$$

Des égalités (4.), (7.), (8.) et (9.), on tire

$$\left.\begin{aligned} a_{ik}^{(k)} &= -\delta_k u_k a_{ik}, \\ a_{ih}^{(k)} &= \delta_k(u_h a_{ih} - u_k a_{ik}), \end{aligned}\right\} \qquad (i=1,2,\dots n;\ h=1,2,\dots n;\ h \neq k)$$

où $\delta_1, \delta_2, .. \delta_n$ sont des facteurs positives. On peut poser

$$\delta_1 = 1, \delta_2 = 1, \dots \delta_n = 1,$$

et les équations (6.) deviennent

$$\Sigma(u_h a_{ih} - u_k a_{ik})(x_i - \alpha_i) = 0, \qquad (h = 1, 2, \dots n;\ h \neq k)$$

$$-\Sigma u_k a_{ik}(x_i - \alpha_i) = 0.$$

Le théorème énoncé est donc démontré.

On dira que les équations (2.) et (3.) qui définissent le sommet (α_i) dans les parallélloèdres contigus $R, R_1, \dots R_n$ sont présentées sous la forme canonique.

Nous avons vu au n° 18 que les parallélloèdres R_k et R_h $(k = 1, 2, \dots n; h = 1, 2, \dots n)$ sont contigus par une face à $n-1$ dimensions. Comme cette face est caractérisée par les arêtes $P_r(1)$ $(r = 0, 1, 2, \dots n; r \neq k; r \neq h)$, on la déterminera dans le parallélloèdre R_k par une équation canonique

$$\Sigma(a'_{ih} - a'_{ik})(x_i - \alpha_i) = 0.$$

Cette même face sera déterminée dans le parallélloèdre R_h par l'équation canonique

$$\Sigma(a'_{ik} - a'_{ih})(x_i - \alpha_i) = 0.$$

Forme canonique des inégalités qui définissent un parallélloèdre primitif.

20. Supposons qu'un parallélloèdre primitif R soit déterminé à l'aide des inégalités indépendantes

$$a_{0k} + \Sigma a_{ik} x_i \geqq 0. \qquad (k = 1, 2, \dots \sigma)$$

En désignant par $u_1, u_2, \dots u_\sigma$ des paramètres positifs arbitraires, on déterminera le parallélloèdre R à l'aide des inégalités indépendantes

$$(1.) \qquad u_k(a_{0k} + \Sigma a_{ik} x_i) \geqq 0. \qquad (k = 1, 2, \dots \sigma)$$

Nous allons voir que tout le problème de l'étude des parallélloèdres primitifs se ramène au choix convenable des paramètres $u_1, u_2, \dots u_\sigma$.

Théorème fondamental. On peut déterminer les valeurs positives des paramètres $u_1, u_2, \dots u_\sigma$ à un facteur commun près, de manière qu'en posant

$$a'_{0k} = u_k a_{0k}, \; a'_{ik} = u_k a_{ik}, \qquad (i=1,2,\dots n;\; k=1,2,\dots \sigma)$$

on déterminera le parallélloèdre R à l'aide des inégalités

$$(2.) \qquad a'_{0k} + \Sigma a'_{ik} x_i \geqq 0 \qquad (k=1,2,\dots \sigma)$$

qui jouissent de la propriété suivante: tous les sommets du parallélloèdre R seront déterminés par les équations présentées sous la forme canonique.

On appellera canoniques les inégalités (2.).

En conservant les notations précédentes, supposons qu'on ait choisi les paramètres $u_1, u_2, \dots u_n$, de manière que le sommet (α_i) soit déterminé par les équations canoniques

$$a'_{0k} + \Sigma a'_{ik} x_i = 0. \qquad (k=1,2,\dots n)$$

Examinons les équations qui définissent un sommet (α_{ik}) $(k=1,2,\dots n)$ du parallélloèdre R adjacent au sommet (α_i) par l'arête $P_k(1)$.

Le sommet (α_{ik}) vérifie $n-1$ équations

$$(3.) \qquad a'_{0h} + \Sigma a'_{ih} x_i = 0. \qquad (h=1,2,\dots n;\; h \neq k)$$

Désignons par

$$(4.) \qquad b_{0k} + \Sigma b_{ik} x_i = 0$$

la n^me^ équation qui définit le sommet (α_{ik}).

Déterminons les paramètres positifs $v_h (h=1, 2, \dots n, h \neq k)$ et v_k correspondant aux équations (3.) et (4.), qui ramènent ces équations à la forme canonique:

$$v_h (a'_{0h} + \Sigma a'_{ih} x_i) = 0 \qquad (h=1,2,\dots n;\; h \neq k)$$

et

$$v_k (b_{0k} + \Sigma b_{ik} x_i) = 0.$$

Je dis qu'on peut poser

$$v_h = 1. \qquad (h=1,2,\dots n;\, h \neq k)$$

Pour le démontrer, examinons l'équation canonique qui définit dans le parallélloèdre $R_h\,(h=1,2\dots n; h \neq k)$ une face à $n-1$ dimensions commune aux parallélloèdres R_r et $R_h\,(r=1,2,\dots n; r \neq h, r \neq k)$.

En vertu du théorème du n° 19, cette face sera déterminée dans R_h par l'équation canonique

$$\Sigma(a'_{ir}-a'_{ih})(x_i-\alpha_i)=0.$$

D'autre part, cette même face sera déterminée dans R_h, en vertu de la supposition faite, par l'équation canonique

$$\Sigma(v_r a'_{ir} - v_h a'_{ih})(x_i-\alpha_i)=0.$$

Il en résulte que

$$v_r a'_{ir} - v_h a'_{ih} = \delta(a'_{ir}-a'_{ih}), \qquad (i=1\ 2,\dots n)$$

et par suite

$$v_r = \delta,\ v_h = \delta,$$

donc

$$v_r = v_h. \qquad (r=1,2,\dots n; r \neq k; r \neq h)$$

Comme les paramètres $v_h\,(h=1,2,\dots n)$ sont définis à un facteur près, on peut poser

$$v_h = 1, \qquad (h=1,2,\dots n;\, h \neq k)$$

et il ne reste qu'à déterminer le paramètre v_k pour définir le sommet (α_{ik}) par les équations canoniques.

21. En appliquant le procédé exposé à tous les sommets du parallélloèdre R adjacents au sommet (α_i) et ainsi de suite, on déterminera successivement les valeurs des différents paramètres correspondant à toutes les inégalités (1.).

Il peut arriver qu'on détermine pour une même inégalité la valeur du paramètre correspondant de plusieurs manières. Je dis que toutes ces valeurs d'un même paramètre coïncident.

Le problème posé est extrêmement difficile. C'est dans cette partie des recherches exposées que se manifeste leur vrai caractère géométrique, et on ne parvient à surmonter les difficultés qui en résultent qu'à l'aide des méthodes géométriques.

Ensemble des simplexes
correspondant aux différents sommets d'un paralléloèdre primitif.

22. Nous avons vu au n° 4 qu'aux différents sommets d'un paralléloèdre R

$$(\alpha_{i1}),\ (\alpha_{i2}), \ldots\ (\alpha_{is})$$

correspondent les domaines

$$A_1, A_2, \ldots\ A_s \tag{1.}$$

qui remplissent uniformément l'espace à n dimensions.

En conservant les notations précédentes, examinons un domaine A qui correspond au sommet (α_i) du paralléloèdre R.

Le domaine A est composé des points déterminés par les égalités

$$x_i = \sum_{k=1}^{n} \varrho_k a_{ik} \quad \text{où} \quad \varrho_k \geqq 0. \qquad (k=1,2,\ldots n) \tag{2.}$$

Le domaine A possède n faces à $n-1$ dimensions qui correspondent à n arêtes $P_k(1)$, $(k=1,2,\ldots n)$ contiguës par le sommet (α_i).

On appellera simple le domaine A.

Retranchons du domaine A un simplexe L en le déterminant à l'aide des égalités

$$x_i = \sum_{k=1}^{n} \vartheta_k u_k a_{ik} \quad \text{où} \quad \Sigma\vartheta_k \leqq 1 \quad \text{et} \quad \vartheta_k \geqq 0. \qquad (k=1,2,\ldots n)$$

Le simplexe L possède $n+1$ faces à $n-1$ dimensions qui sont opposées à $n+1$ sommets

$$(0),\ (u_1 a_{i1}),\ (u_2 a_{i2}), \ldots\ (u_n a_{in}).$$

Examinons la face du simplexe L qui est opposée au sommet (0). On peut présenter l'équation qui définit cette face sous la forme

$$(3.) \qquad 1 - \Sigma p_i x_i = 0.$$

Il s'ensuit qu'on aura une inégalité

$$1 - \Sigma p_i x_i > 0$$

pour chaque point de L qui n'appartient pas à la face examinée.

Comme les sommets de $L:(u_k a_{ik})$ $(k = 1, 2, \dots n)$ vérifient l'équation (3.), on a

$$(4.) \qquad \Sigma p_i a_{ik} = \frac{1}{u_k}, \qquad (k=1,2,\dots n)$$

donc

$$\Sigma p_i a_{ik} > 0. \qquad (k=1,2,\dots n)$$

En vertu de (2.), on obtient l'inégalité

$$\Sigma p_i x_i > 0$$

qui subsiste, quel que soit un point (x_i) du domaine A, le sommet (0) étant exclu.

23. Examinons de la même manière n domaines $A_1, A_2, \dots A_n$ qui sont contigus au domaine A par des faces à $n-1$ dimensions.

On retranchera du domaine simple A_k $(k = 1, 2, \dots n)$ défini par les égalités

$$x_i = \Sigma \varrho_h a_{ih} + \varrho_k b_{ik} \text{ où } \varrho_k \geqq 0 \text{ et } \varrho_h \geqq 0, \qquad (h=1,2,\dots n;\ h \neq k)$$

un simplexe L_k composé de points

$$x_i = \Sigma \vartheta_h u_h a_{ih} + \vartheta_k v_k b_{ik} \text{ où } \Sigma \vartheta_h + \vartheta_k \leqq 1,\ \vartheta_k \geqq 0,\ \vartheta_h > 0. \qquad (h=1,2,\dots n;\ h \neq k)$$

Désignons par

$$1 - \Sigma p_{ik} x_i = 0$$

l'équation de la face du simplexe L_k qui est opposée au sommet (0).

On aura les égalités

$$\Sigma p_{ik}\, a_{ih} = \frac{1}{u_h} \qquad (h=1,2,\dots n,\ h \neq k)$$

et

$$\Sigma p_{ik}\, b_{ik} = \frac{1}{u_k}.$$

En vertu des égalités (4.), on obtient

$$\Sigma p_{ik}\, a_{ih} = \Sigma p_i\, a_{ih}. \qquad (h=1,2,\dots n,\ h \neq k)$$

Il s'ensuit que

$$(5.) \qquad \Sigma p_{ik}\, x_i = \Sigma p_i\, x_i,$$

quel que soit un point (x_i) appartenant à la face commune des domaines A et A_k.

En appliquant le procédé exposé aux domaines qui sont contigus aux domaines $A_1, A_2, \dots A_n$ et ainsi de suite, on retranchera de chaque domaine de l'ensemble (1.) un simplexe correspondant.

Il peut arriver qu'on retranche d'un même domaine le simplexe correspondant de plusieurs manières. Je dis que tous ces simplexes coïncident.

Il est clair que le problème posé ne diffère que par une formulation du problème énoncé au n° 21.

Nous allons exposer une formulation nouvelle de ce problème.

Sur une fonction définie par l'ensemble des simplexes correspondant aux différents sommets d'un parallélloèdre primitif.

24. Introduisons dans nos recherches une fonction $P(x_1, x_2, \dots x_n)$ des variables $x_1, x_2, \dots x_n$ en la définissant comme il suit.

1. On déterminera la fonction $P(x_1, x_2, \dots x_n)$ dans le domaine A par la formule

$$P_{(A)}(x_1, x_2, \dots x_n) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i.$$

2. Dans les domaines $A_k\,(k=1,2,\dots n)$ contigus au domaine A par les faces à $n-1$ dimensions, on déterminera la fonction $P(x_1, x_2, \dots x_n)$ par

la formule

$$P_{(A_k)}(x_1, x_2, \dots x_n) = \sum_{i=1}^{n} p_{ik} x_i. \qquad (k=1,2,\dots n)$$

3. Soit

$$(1.) \qquad A, A', A'', \dots A^{(m)}$$

une série de domaines qui sont successivement contigus par les faces à $n-1$ dimensions. On retranchera de ces domaines successivement les simplexes

$$L, L', L'', \dots L^{(m)}$$

et on déterminera les fonctions correspondantes

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i, \ \sum_{i=1}^{n} p'_i x_i, \ \sum_{i=1}^{n} p''_i x_i, \dots \sum_{i=1}^{n} p_i^{(m)} x_i.$$

On définira la fonction $P(x_1, x_2, \dots x_n)$ dans les domaines (1.) par la formule

$$P_{(A^{(k)})}(x_1, x_2, \dots x_n) = \sum_{i=1}^{n} p_i^{(k)} x_i. \qquad (k=1,2,\dots m)$$

Théorème fondamental. La fonction $P(x_1, x_2, \dots x_n)$ définie par les conditions 1., 2. *et* 3. *est continue et uniforme dans tout l'espace à n dimensions.*

Observons que le théorème fondamental énoncé ne présente qu'une formulation nouvelle du théorème fondamental du n° 20.

Prenons un contour fermé arbitraire C. En parcourant le contour C, on peut déterminer une série de domaines contigus successivement par les faces à $n-1$ dimensions auxquels appartiennent les points du contour C:

$$A^{(0)}, A', A'', \dots A^{(m)}, A^{(0)}, A', \dots.$$

Pour le démontrer, prenons un point (ξ_{i0}) du contour C et désignons par C_0 une courbe qui est parcourue dans un domaine $A^{(0)}$ à partir du point initial (ξ_{i0}). Admettons que la courbe C_0 ne coïncide pas avec le contour C et désignons par (ξ_{i1}) le point final de la courbe C_0.

Supposons qu'en partant du point (ξ_{i1}) on soit sorti du domaine $A^{(0)}$ et qu'on soit entré dans le domaine A'. Désignons par C_1 une partie du contour C qu'on a parcourue dans le domaine A' à partir du point (ξ_{i1}) et ainsi de suite. Supposons qu'on ait partagé à l'aide du procédé exposé le contour C en parties

$$C_0, C_1, \dots C_m, C_0$$

qui appartiennent aux domaines

$$(2.) \qquad A^{(0)}, A', A'', \dots A^{(m)}, A^{(0)}.$$

Il peut arriver que deux domaines adjacents de cette série $A^{(k)}$ et $A^{(k+1)}$ ne soient pas contigus par une face à $n-1$ dimensions. On intercalera dans ce cas entre les domaines $A^{(k)}$ et $A^{(k+1)}$ des domaines nouveaux en les déterminant comme il suit:

Un point $(\xi_{i,k+1})$ qui est le point final de la courbe C_k et qui présente le point initial de la courbe C_{k+1} appartient, en vertu de la supposition faite, aux domaines $A^{(k)}$ et $A^{(k+1)}$. On en conclut que le point $(\xi_{i,k+1})$ est intérieur à une face $A^{(k)}(\nu)$ à ν dimensions qui est commune aux domaines $A^{(k)}$ et $A^{(k+1)}$.

On peut déterminer un parallélopipède K à l'aide des égalités

$$x_i = \xi_{i,k+1} + u_i \quad \text{où} \quad |u_i| \leqq \varepsilon, \qquad (i=1,2,\dots n)$$

de manière que tous les points du parallélopipède K n'appartiennent qu' aux domaines de la série (1.) (n° 22.) qui sont contigus par la face $A^{(k)}(\nu)$.

Prenons dans le parallélopipède K deux points (x_{ik}) et $(x_{i,k+1})$ qui sont intérieurs aux domaines $A^{(k)}$ et $A^{(k+1)}$ et menons dans le parallélopipède K une courbe $C^{(k)}$ qui joint les points (x_{ik}) et $(x_{i,k+1})$. On peut choisir cette courbe, de manière qu'elle ne franchisse aucune face des domaines (1.) (n° 22.) dont le nombre des dimensions est inférieur à $n-1$.

Supposons que la courbe $C^{(k)}$ traverse les domaines

$$A^{(k)}, A_1^{(k)}, \dots A_\mu^{(k)}, A^{(k+1)}.$$

En vertu de la supposition faite, les domaines obtenus sont successivement contigus par les faces à $n-1$ dimensions. Tous ces domaines sont contigus deux à deux par la face $A^{(k)}(\nu)$.

De la même manière, on examinera toutes les paires de domaines adjacents de la série (2.) et on formera la série

$$A^{(0)}, A', \dots A^{(m)}, A^{(0)}$$

de domaines contigus successivement par les faces à $n-1$ dimensions auxquels appartiennent tous les points du contour fermé donné C.

25. Cela posé, observons que le théorème fondamental énoncé est vrai dans le cas où tous les domaines (2.) sont contigus au moins par une arête.

En effet, supposons qu' on ait retranché des domaines (2.) successivement les simplexes

$$(3.)\qquad L^{(0)},\ L', L'', \dots L^{(m)}, L^{(m+1)}.$$

Je dis que le simplexe $L^{(m+1)}$ retranché du domaine $A^{(0)}$ coïncide avec le simplexe $L^{(0)}$. Pour le démontrer, désignons par

$$\Sigma p_i^{(0)} x_i,\ \Sigma p_i' x_i, \dots \Sigma p_i^{(m)} x_i,\ \Sigma p_i^{(m+1)} x_i$$

les fonctions correspondant aux simplexes (3.).

Comme les simplexes $L^{(0)}$ et $L^{(m+1)}$ sont retranchés du même domaine $A^{(0)}$, on peut poser

$$(4.)\qquad \Sigma p_i^{(m+1)} x_i = \delta\, \Sigma p_i^{(0)} x_i.$$

En vertu de la supposition faite, les domaines (2.) sont contigus au moins par une arête. Soit (a_i) un point de cette arête.

Comme les domaines $A^{(0)}$ et A' sont contigus par une face à $n-1$ dimensions, on aura, comme nous l'avons vu au n° 23, une égalité

$$(5.)\qquad \Sigma p_i^{(0)} x_i = \Sigma p_i' x_i$$

qui subsiste, quel que soit le point (x_i) de la face commune aux domaines $A^{(0)}$ et A'.

En faisant $x_i = a_i$, on obtient

$$\Sigma p^{(0)} a_i = \Sigma p_i' a_i.$$

De la même manière, on obtiendra

$$\Sigma p_i^{(0)} a_i = \Sigma p_i' a_i = \cdots \Sigma p_i^{(m)} a_i = \Sigma p_i^{(m+1)} a_i.$$

D'autre part, l'identité (4.) donne

$$\Sigma p_i^{(0)} a_i = \delta \Sigma p_i^{(m+1)} a_i,$$

et comme $\Sigma p_i^{(0)} a_i > 0$, il vient $\delta = 1$, donc

$$\Sigma p_i^{(m+1)} x_i = \Sigma p_i^{(0)} x_i,$$

et les deux simplexes $L^{(0)}$ et $L^{(m+1)}$ coïncident.

En vertu de la définition établie, on déterminera la fonction $P(x_1, \ldots x_n)$ dans le domaine $A^{(0)}$ par la formule

$$P_{(A^0)}\ (x_1, x_2, \ldots x_n) = \Sigma p_i^{(0)} x_i$$

en partant du domaine $A^{(0)}$ et en revenant dans ce domaine après avoir parcouru le chemin C.

26. Nous allons voir que le cas général peut être ramené au cas examiné. A cet effet, envisageons la projection d'un contour quelconque C prise par rapport à une surface S déterminée par l'équation

$$\Sigma x_i^2 = 1.$$

En posant

$$(6.) \qquad x_i' = \frac{x_i}{\sqrt{\Sigma x_i^2}}, \qquad (i = 1, 2, \ldots n)$$

on appellera le point (x_i') la projection du point (x_i) dans la surface S.

Désignons par C' une projection du contour quelconque C.

Admettons qu'en parcourant le contour C', on revienne au point initial (ξ_i') avec la même détermination de la fonction $P(x_1, \ldots x_n)$ qu'en partant de ce point. Je dis qu'on reviendra au point correspondant (ξ_i) du contour C avec la même détermination de la fonction $P(x_1, \ldots x_n)$.

Pour le démontrer, il suffit d'observer que les points (ξ_i) et (ξ'_i), en vertu des égalités (6.), appartiennent aux mêmes domaines de la série (2.).

On en conclut qu'il suffit d'examiner les différents contours fermés appartenant à la surface S.

27. Introduisons dans nos recherches une fonction $d(x_i, x'_i)$ en la définissant par la formule

$$d(x_i, x'_i) = \sqrt{\Sigma (x'_i - x_i)^2}.$$

On appellera écart de deux points (x_i) et (x'_i) la valeur correspondante de la fonction $d(x_i, x'_i)$.

Lemme. On peut déterminer un paramètre positif δ satisfaisant à la condition suivante: chaque contour fermé C appartenant à la surface S sera situé dans les domaines qui sont contigus au moins par une arête, si l'écart de tous les points du contour C, les uns des autres, ne surpasse pas la limite δ.

Soit (ξ_i) un point du contour C appartenant au domaine A. Posons

$$\xi_i = \sum_{k=1}^{n} \rho_k a_{ik} \text{ où } \rho_k \geqq 0. \qquad (k=1,2\ldots n)$$

En vertu de l'égalité

$$\Sigma \xi_i^2 = 1,$$

la somme $\sum_{k=1}^{n} \rho_k$ n'est pas inférieure à une limite fixe positive

$$\sum_{k=1}^{n} \rho_k \geqq \tau. \tag{7.}$$

Admettons que le contour C ne soit pas situé tout entier dans le domaine A.

Soit (ξ'_i) un point de C qui n'appartient pas au domaine A. En posant

$$\xi'_i = \sum_{k=1}^{n} \rho'_k a_{ik}, \tag{8.}$$

on aura parmi les nombres $\rho'_1, \rho'_2, \ldots \rho'_n$ au moins un nombre négatif.

Supposons, pour fixer les idées, que

$$(9.)\qquad \varrho'_1 \geqq 0,\ \varrho'_2 \geqq 0, \ldots \varrho'_\mu \geqq 0$$

et que

$$(10.)\qquad \varrho'_{\mu+1} < 0,\ \varrho'_{\mu+2} < 0, \ldots \varrho'_n < 0.$$

D'après la supposition faite, on a l'inégalité

$$d(\xi_i, \xi'_i) \leqq \delta.$$

On peut choisir le paramètre δ, de manière qu'on ait les inégalités

$$(11.)\qquad |\varrho'_k - \varrho_k| < \varepsilon, \qquad (k=1,2,\ldots n)$$

ε étant un paramètre positif aussi petit qu'on voudra.

A cause de (10.), on obtient

$$(12.)\qquad 0 \leqq \varrho_k < \varepsilon,\ -\varepsilon < \varrho'_k < 0. \qquad (k=\mu+1;\mu+2,\ldots n)$$

Choisissons parmi les nombres $\varrho_1, \varrho_2, \ldots \varrho_n$ celui qui est le plus grand. En vertu de l'inégalité (7.), ce nombre ne peut être inférieur à $\frac{\tau}{n}$. En supposant que

$$\varepsilon < \frac{\tau}{n},$$

on trouvera le nombre cherché parmi les nombres $\varrho_1, \varrho_2, \ldots \varrho_\mu$. Supposons, pour fixer les idées, que

$$\varrho_1 > \frac{\tau}{n}.$$

L'inégalité (11.) donne

$$(13.)\qquad \varrho'_1 > \frac{\tau}{n} - \varepsilon.$$

Cela posé, supposons que le point (ξ'_i) appartienne au domaine A' et posons

$$(14.)\qquad \xi'_i = \sum_{k=1}^{n} u_k a'_{ik} \text{ où } u_k \geqq 0. \qquad (k=1,2,\ldots n)$$

Désignons par (α_i) et (α'_i) deux sommets du parallélloèdre R correspondant aux domaines A et A' en les définissant par les équations

$$a_{0k} + \Sigma a_{ik} x_i = 0, \qquad (k=1,2,\dots n)$$

et par les équations

$$(15.) \qquad a'_{0k} + \Sigma a'_{ik} x_i = 0. \qquad (k=1,2,\dots n)$$

En vertu des égalités (8.) et (14.), on obtient une identité

$$(16.) \qquad \varrho'_0 + \sum_{k=1}^{n} \varrho'_k (a_{0k} + \Sigma a_{ik} x_i) = \sum_{k=1}^{n} u_k (a'_{0k} + \Sigma a'_{ik} x_i).$$

En faisant dans cette identité $x_i = \alpha_i$, on trouve

$$(17.) \qquad \varrho'_0 = \Sigma u_k (a'_{0k} + \Sigma a'_{0k} \alpha_i) \geqq 0.$$

En faisant dans l'identité (16.) $x_i = \alpha'_i$, il viendra

$$(18.) \qquad \varrho'_0 + \sum_{k=1}^{n} \varrho'_k (a_{0k} + \Sigma a_{ik} \alpha'_i) = 0.$$

Admettons que

$$a_{01} + \Sigma a_{i1} \alpha'_i > 0.$$

En vertu de (9.), (12.), (13.) et (17.), on aura

$$\varrho'_0 + \sum_{k=1}^{\mu} \varrho'_k (a_{0k} + \Sigma a_{ik} \alpha'_i) > \left(\frac{\tau}{n} - \varepsilon\right)(a_{01} + \Sigma a_{i1} \alpha'_i),$$

$$\sum_{k=\mu+1}^{n} \varrho'_k (a_{0k} + \Sigma a_{ik} \alpha'_i) \geqq -\varepsilon \sum_{k=\mu+1}^{n} (a_{0k} + \Sigma a_{ik} \alpha'_i),$$

et l'égalité (18.) donne

$$(19.) \qquad \frac{\tau}{n}(a_{01} + \Sigma a_{i1} \alpha'_i) < \varepsilon \left[a_{01} + \Sigma a_{i1} \alpha'_i + \sum_{k=\mu+1}^{n} (a_{0k} + \Sigma a_{ik} \alpha'_i)\right].$$

Désignons

$$A = \frac{\tau}{n}(a_{01} + \Sigma a_{i1} \alpha'_i) \quad \text{et} \quad B = a_{01} + \Sigma a_{i1} \alpha'_i + \sum_{k=\mu+1}^{n} (a_{0k} + \Sigma a_{ik} \alpha'_i);$$

on aura

$$A > 0 \text{ et } B > 0,$$

et par suite

$$\varepsilon > \frac{A}{B}. \tag{20.}$$

On pourrait déterminer le rapport $\frac{A}{B}$ correspondant aux différents sommets du parallélloèdre R. Désignons par ω le plus petit de ces rapports qui ne s'annule pas. Le paramètre ε étant arbitraire, on peut supposer que

$$\varepsilon \leqq \omega.$$

L'inégalité (20.) devient impossible, il est donc nécessaire que $A = 0$ ou autrement

$$a_{01} + \Sigma a_{i1} \alpha_i' = 0.$$

En vertu de l'égalité obtenue, les coefficients de l'équation

$$a_{01} + \Sigma a_{i1} x_i = 0$$

sont proportionnels à ceux d'une équation qui se trouve parmi les équations (15.).

En posant

$$a_{01} + \Sigma a_{i1} x_i = u(a'_{0h} + \Sigma a'_{ih} x_i) \quad \text{où} \quad u > 0,$$

on aura

$$a_{i1} = u\, a'_{ih}. \qquad (i = 1, 2, \ldots n)$$

Nous sommes arrivés au résultat suivant: tous les domaines traversés par le contour examiné C sont contigus au moins par une arête qui est caractérisée par le point (a_{i1}).

28. Nous sommes maintenant en état d'aborder la démonstration du théorème fondamental énoncé.

Soit C un contour quelconque appartenant à la surface S. Supposons qu'en partant du point (ξ_i) on passe par les points $(\xi_i^{(0)}), (\xi_i'), (\xi_i'')$ et on revient au point (ξ_i).

Le chemin autour du contour C peut être remplacé par deux chemins $C^{(0)}$ et C'.

Le contour $C^{(0)}$ sera composé d'une partie $(\xi_i)-(\xi_i^{(0)})$ de C, du vecteur $[\xi_i^{(0)}, \xi_i'']$ et d'une partie $(\xi_i'')-(\xi_i)$ de C.

Le contour C' sera composé d'une partie $(\xi_i^{(0)})-(\xi_i')-(\xi_i'')$ du contour C et du vecteur $[\xi_i'', \xi_i^{(0)}]$.

Admettons qu'en parcourant les chemins $C^{(0)}$ et C' on définisse uniformément la fonction $P(x_1, x_2, \dots x_n)$. Dans ce cas le trajet par la partie $(\xi_i^{(0)})-(\xi_i')-(\xi_i'')$ du contour C peut être remplacé par le chemin le long du vecteur $[\xi_i^{(0)}, \xi_i'']$.

En remplaçant la partie $(\xi_i^{(0)})-(\xi_i')-(\xi_i'')$ du contour C par le vecteur $[\xi_i^{(0)}, \xi_i'']$, on transformera le contour C en $C^{(0)}$, donc, en parcourant le contour C, on reviendra au point (ξ_i), en vertu des suppositions faites, avec la même détermination de la fonction $P(x_1, x_2, \dots x_n)$.

Deux contours $C^{(0)}$ et C' peuvent être examinés de la même manière et ainsi de suite.

Supposons qu'on ait déterminé les contours

$$(21.) \qquad C_1, C_2, \dots C_m$$

qui remplacent le chemin C. En admettant que la fonction $P(x_1, x_2, \dots x_n)$ soit uniforme le long des contours (21.), on démontrera qu'elle sera uniforme le long du contour donné C.

Cela posé, observons qu'on peut toujours choisir les contours (21.), de manière que ces contours satisfassent aux conditions du lemme du n° précédent. Dans ce cas, chaque contour (21.) sera situé dans des domaines qui sont contigus au moins par une arête. Nous avons vu au n° 25 qu'en parcourant des contours pareils on reviendra toujours au point de départ avec la même détermination de la fonction $P(x_1, x_2, \dots x_n)$ qu'en sortant de ce point. Il est donc démontré que chaque contour fermé C possède la même propriété.

Nous avons démontré que la fonction $P(x_1, x_2, \dots x_n)$ est uniformément définie dans chaque domaine de l'ensemble (1.) (n° 22). Il reste à démontrer que la fonction $P(x_1, x_2, \dots x_n)$ est bien définie dans chaque point de l'espace à n dimensions.

Admettons qu' un point (ξ_i) appartienne à deux domaines A et $A^{(0)}$.

Je dis que la fonction $P(x_1, x_2, \dots x_n)$ pour le point (ξ_i) aura une même valeur déterminée dans le domaine A et dans le domaine $A^{(0)}$.

Pour le démontrer, on formera une série de domaines

$$A, A', \dots A^{(m)}, A^{(0)}$$

qui sont successivement contigus par des faces à $n-1$ dimensions et auxquels appartient le point (ξ_i).

Comme le point (ξ_i) appartient à la face commune des domaines A et A', on aura, en vertu de la formule (5.) du nº 23,

$$P_{(A)}(\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n) = P_{(A')}(\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n).$$

De la même manière, on obtient

$$P_{(A')}(\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n) = P_{(A'')}(\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$P_{(A^{(m)})}(\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n) = P_{(A^0)}(\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n).$$

Il en résulte que

$$P_{(A)}(\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n) = P_{(A^0)}(\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n).$$

Le théorème fondamental énoncé est donc démontré.

Forme canonique
des inégalités qui définissent l'ensemble (R) des parallélloèdres primitifs.

29. Choisissons dans l'ensemble (R) des parallélloèdres primitifs un parallélloèdre quelconque R_0. Supposons que le parallélloèdre R_0 soit déterminé à l'aide des inégalités canoniques

$$a_{0k} + \Sigma a_{ik} x_i \geqq 0. \qquad (k=1,2,\dots \sigma)$$

Observons qu'on peut remplacer ces inégalités par les inégalités canoniques suivantes:

$$u(a_{0k} + \Sigma a_{ik} x_i) \geqq 0, \qquad (k=1,2,\dots \sigma)$$

u étant un paramètre arbitraire positif.

Désignons par R_k $(k=1,2,\dots \sigma)$ le parallélоèdre qui est contigu au parallélоèdre R_0 par la face déterminée dans R_0 par l'équation

$$(1.) \qquad a_{0k} + \Sigma a_{ik} x_i = 0$$

et supposons que le vecteur $[\lambda_{ik}]$ définisse une translation du parallélоèdre R_k en R_0.

Il s'ensuit que le parallélоèdre R_k sera déterminé par les inégalités canoniques

$$a_{0h} + \Sigma a_{ih} (x_i + \lambda_{ik}) > 0, \qquad (h=1,2,\dots \sigma)$$

ou par les inégalités canoniques

$$(2.) \qquad u_k[a_{0h} + \Sigma a_{ih} (x_i + \lambda_{ik})] \geqq 0, \qquad (h=1,2,\dots \sigma)$$

u_k étant un paramètre positif arbitraire.

La face P_k à $n-1$ dimensions commune aux parallélоèdres R_0 et R_k est définie dans le parallélоèdre R_0 par l'équation (1.). Dans le parallélоèdre R_k, la face P_k sera déterminée par une équation dont les coefficients sont proportionnels à ceux de l'équation

$$-a_{0k} - \Sigma a_{ik} x_i = 0.$$

On peut choisir le paramètre positif u_k, de manière qu'on ait l'identité

$$-a_{0k} - \Sigma a_{ik} x_i = u_k\big(a_{0h} + \Sigma a_{ih} (x_i + \lambda_{ik})\big).$$

Dans ce cas, l'inégalité

$$-a_{0k} - \Sigma a_{ik} x_i \geqq 0$$

se trouve parmi les inégalités (2.) qui définissent le parallélоèdre R_k.

On dira que ces inégalités sont présentées sous la forme canonique.

30. Observons une propriété importante des inégalités canoniques qui définissent les parallélloèdres $R_0, R_1, R_2, \dots R_\sigma$.

Soit (α_i) un sommet du parallélloèdre R_0 déterminé par les équations canoniques

$$a_{0k} + \Sigma a_{ik} x_i = 0. \qquad (k = 1, 2, \dots n) \tag{3.}$$

Examinons les équations canoniques qui définissent le sommet (α_i) dans le parallélloèdre R_k $(k = 1, 2, \dots n)$.

Les équations (3.) étant canoniques, on déterminera le sommet (α_i) dans le parallélloèdre R_k, en vertu du théorème du n° 19, par les équations

$$\Sigma (a_{ih} - a_{ik})(x_i - \alpha_i) = 0, \qquad (h = 1, 2, \dots n;\ h \gtrless k)$$

$$- \Sigma a_{ik} (x_i - \alpha_i) = 0. \qquad (k = 1, 2, \dots n)$$

En vertu de la supposition faite, l'inégalité

$$- \Sigma a_{ik} (x_i - \alpha_i) \geqq 0$$

se trouve parmi les inégalités canoniques (2.) qui définissent le parallélloèdre R_k, il en résulte que les inégalités

$$\Sigma (a_{ih} - a_{ik})(x_i - \alpha_i) \geqq 0, \qquad (h = 1, 2, \dots n,\ h \gtrless k)$$

se trouvent aussi parmi les inégalités canoniques (2.).

On en conclut que l'équation canonique

$$\Sigma (a_{ih} - a_{ik})(x_i - \alpha_i) = 0$$

définit dans le parallélloèdre R_k une face à $n-1$ dimensions qui est commune aux parallélloèdres R_k et R_h. La même face sera détérminée dans le parallélloèdre R_h par une équation canonique

$$\Sigma (a_{ik} - a_{ih})(x_i - \alpha_i) = 0.$$

31. En appliquant le procédé exposé, on peut déterminer les inégalités canoniques qui définissent les parallélloèdres contigus aux parallélloèdres $R_1, R_2, \dots R_\sigma$ et ainsi de suite.

Quel que soit un parallélloèdre R de l'ensemble (R), on peut former une série de parallélloèdres

$$R_0, R', R'', \dots R^{(m)}, R$$

qui sont successivement contigus. On déterminera successivement les inégalités canoniques qui définissent les parallélloèdres de cette série.

On pourrait arriver au parallélloèdre R par d'autres voies et déterminer les inégalités canoniques qui définissent le parallélloèdre R de plusieurs manières.

Nous allons voir que les inégalités canoniques qui définissent un parallélloèdre de l'ensemble (R) ne dépendent pas du chemin par lequel on arrive au parallélloèdre R en partant du parallélloèdre principal R_0.

Fonction génératrice de l'ensemble (R) des parallélloèdres primitifs.

32. Envisageons un ensemble (R) de parallélloèdres primitifs. Supposons que chaque parallélloèdre R de l'ensemble (R) soit caractérisé par un vecteur $[\lambda_i]$ qui définit une translation du parallélloèdre R en un parallélloèdre principal R_0.

Désignons par G le groupe des vecteurs $[\lambda_i]$ qui correspondent aux différents parallélloèdres de l'ensemble (R).

Introduisons dans nos recherches une fonction

$$V(x_1, x_2, \dots x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n)$$

des variables $x_1, x_2, \dots x_n$ et des paramètres $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n$ en la définissant dans l'espace à n dimensions et pour le groupe G comme il suit:

1. Dans le parallélloèdre principal R_0, on posera

$$V(x_1, x_2, \dots x_n, 0, 0, \dots 0) = 0.$$

2. Dans le parallélloèdre R_k qui est contigu à R_0, on posera

$$V(x_1, x_2, \dots x_n, \lambda_{1k}, \lambda_{2k}, \dots \lambda_{nk}) = a_{0k} + \Sigma a_{ik} x_i, \qquad (k = 1, 2, \dots \sigma)$$

à condition que dans le parallélloèdre R_0 l'équation canonique

$$a_{0k}+\Sigma a_{ik}x_i=0$$

définisse la face à $n-1$ dimensions commune aux parallélloèdres R_0 et R_k.

3. En supposant que deux parallélloèdres R et R' caractérisés par les vecteurs $[\lambda_i]$ et $[\lambda'_i]$ soient contigus par une face à $n-1$ dimensions qui est définie dans R par une équation canonique

$$a_0+\Sigma a_i x_i=0,$$

on posera

$$V(x_1,x_2,\ldots x_n,\lambda'_1,\lambda'_2,\ldots \lambda'_n)=V(x_1,x_2,\ldots x_n,\lambda_1,\lambda_2,\ldots \lambda_n)+a_0+\Sigma a_i x_i.$$

33. Soit R un parallélloèdre quelconque de l'ensemble (R) caractérisé par un vecteur $[\lambda_i]$. On formera une série de parallélloèdres

$$R_0, R', \ldots R^{(m)}, R$$

qui sont contigus successivement par des faces à $n-1$ dimensions. Désignons par

$$a_0^{(0)}+\Sigma a_i^{(0)}x_i=0$$

l'équation de la face commune aux parallélloèdres R_0 et R' et définie dans R_0; désignons par

$$a'_0+\Sigma a'_i x_i=0$$

l'équation de la face commune aux parallélloèdres R' et R'' définie dans R' et ainsi de suite.

En appliquant la définition établie, on déterminera la fonction

$$V(x_1,x_2,\ldots x_n,\ \lambda_1,\lambda_2,\ldots \lambda_n)$$

par la formule

$$V(x_1,x_2,\ldots x_n,\lambda_1,\lambda_2,\ldots \lambda_n)=\sum_{k=0}^{m}(a_0^{(k)}+\Sigma a_i^{(k)}x_i).$$

34. *Théorème fondamental. La fonction* $V(x_1,x_2,\ldots x_n,\ \lambda_1,\lambda_2,\ldots \lambda_n)$ *est bien définie pour chaque vecteur* $[\lambda_i]$ *du groupe* G.

Supposons qu'on ait formé une série de parallélloèdres

$$R, R', R'', \dots R^{(m)}, R \tag{1.}$$

qui sont successivement contigus. En partant du parallélloèdre R avec une détermination quelconque de la fonction $V(x_1, x_2, \dots x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n)$, on reviendra dans le parallélloèdre R après avoir parcouru les parallélloèdres (1.) avec une détermination de la fonction $V(x_1, x_2, \dots x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n)$ qui, en vertu de la définition établie, s'exprime par la somme

$$V(x_1, x_2, \dots x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n) + \sum_{k=0}^{m} (a_0^{(k)} + \Sigma a_i^{(k)} x_i).$$

Nous allons démontrer qu'on aura toujours

$$\sum_{k=0}^{m} (a_0^{(k)} + \Sigma a_i^{(k)} x_i) = 0.$$

Examinons, en premier lieu, le cas, où tous les parallélloèdres (1.) sont contigus au moins par un sommet (α_i). En vertu du théorème II du n° 17, tous les parallélloèdres primitifs (1.) seront dans ce cas contigus deux à deux par des faces à $n-1$ dimensions.

Désignons par

$$a_{0k} + \Sigma a_{ik}(x_i - \alpha_i) = 0, \qquad (k=1,2,\dots m)$$

l'équation canonique de la face commune aux parallélloèdres $R^{(k)}$ et R $(k=1, 2, \dots m)$ définie dans le parallélloèdre R.

Nous avons vu au n° 30 que l'équation canonique de la face commune aux parallélloèdres R' et R'' et définie dans R' sera

$$\Sigma (a_{i2} - a_{i1}) (x_i - \alpha_i) = 0$$

et ainsi de suite. On obtient les formules

$$\begin{aligned}
a_0^{(0)} \quad &+ \Sigma a_i^{(0)} x_i = \Sigma a_{i1} (x_i - \alpha_i), \\
a_0' \quad &+ \Sigma a_i' x_i = \Sigma (a_{i2} - a_{i1}) (x_i - \alpha_i), \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
a_0^{(m-1)} &+ \Sigma a_i^{(m-1)} x_i = \Sigma (a_{im} - a_{i,m-1}) (x_i - \alpha_i), \\
a_0^{(m)} \quad &+ \Sigma a_i^{(m)} x_i = -\Sigma a_{im} (x_i - \alpha_i),
\end{aligned}$$

et il s'ensuit que

$$\sum_{k=0}^{m} (a_0^{(k)} + \Sigma a_i^{(k)} x_i) = 0.$$

35. Nous allons voir que le cas général peut être ramené au cas examiné.

Lemme. On peut déterminer un paramètre positif δ, de manière que chaque contour fermé C soit situé dans des parallélloèdres qui sont contigus au moins par un sommet, à condition que l'écart de deux points quelconques du contour C ne surpasse pas la limite δ.

Observons, en premier lieu, que l'écart de deux points (ξ_i) et (ξ_i') appartenant à deux parallélloèdres qui ne sont pas contigus ne peut être inférieur à une limite fixe. Pour le démontrer, supposons que le point (ξ_i) appartienne au parallélloèdre R défini à l'aide des inégalités

$$a_{0k} + \Sigma a_{ik} x_i \geqq 0. \qquad (k=1, 2, \dots \sigma)$$

Désignons par $R_1, R_2, \dots R_\sigma$ les parallélloèdres qui sont contigus à R et examinons l'ensemble K des points appartenant aux parallélloèdres $R, R_1, \dots R_\sigma$.

Désignons par

$$(\alpha_{i1}), (\alpha_{i2}), \dots (\alpha_{is})$$

les sommets du parallélloèdre R et désignons par

$$(\alpha_{i1}^{(h)}), (\alpha_{i2}^{(h)}), \dots (\alpha_{is}^{(h)}), \qquad (h=1, 2, \dots \sigma)$$

les sommets du parallélloèdre $R_h \, (h=1, 2, \dots \sigma)$.

En vertu de la supposition faite, on aura les inégalités

$$a_{0h} + \Sigma a_{ih} \alpha_{ik}^{(h)} \leqq 0, \qquad (k=1, 2, \dots s; \; h=1, 2, \dots \sigma).$$

Désignons par ϱ la plus petite valeur numérique des sommes

$$a_{0h} + \Sigma a_{ih} \alpha_{ik}^{(h)} \qquad (k=1, 2, \dots s; \; h=1, 2, \dots \sigma)$$

qui ne s'annulent pas. En vertu de la supposition faite, on aura l'inégalité

$$\varrho + a_{0h} + \Sigma a_{ih} \alpha_{ik}^{(h)} \leqq 0,$$

à condition que

$$a_{0h} + \Sigma a_{ih} \alpha_{ik}^{(h)} < 0,$$

où $k = 1, 2, \dots s$, $h = 1, 2, \dots \sigma$.

Cela posé, prenons un point quelconque (ξ_i') qui n'appartient pas à l'ensemble K. Examinons les points d'un vecteur $[\xi_i, \xi_i']$. En posant

$$x_i = \xi_i + u(\xi_i' - \xi_i) \quad \text{où} \quad 0 \leqq u \leqq 1,$$

laisons croître le paramètre u d'une manière continue dans l'intervalle $0 < u < 1$. On déterminera un point

$$\xi_i^{(0)} = \xi_i + u_0(\xi_i' - \xi_i) \quad \text{où} \quad 0 < u_0 < 1 \tag{2.}$$

qui appartient à la frontière de l'ensemble K, c'est-à-dire à une face à $n-1$ dimensions des parallélloèdres $R_1, R_2, \dots R_\sigma$ et qui appartient aussi à un autre parallélloèdre R'.

Supposons que le point $(\xi_i^{(0)})$ appartienne au parallélloèdre R_h. Les parallélloèdres R_h et R' seront contigus par une face à $n-1$ dimensions.

Désignons par

$$(\alpha_{i1}^{(h)}), \ (\alpha_{i2}^{(h)}), \ \dots \ (\alpha_{it}^{(h)}) \tag{3.}$$

les sommets du parallélloèdre R_h qui appartiennent à cette face.

Aucun de ces sommets ne vérifie l'équation

$$a_{0h} + \Sigma a_{ih} x_i = 0$$

puisqu' autrement la face examinée appartiendrait à deux parallélloèdres de la série $R, R_1, \dots R_\sigma$, ce qui est contre l'hypothèse.

On aura donc les inégalités

$$\varrho + a_{0h} + \Sigma a_{ih} \alpha_{ik}^{(h)} \leqq 0. \qquad (k = 1, 2, \dots t)$$

Le point $(\xi_i^{(0)})$ appartenant à la face de R_h, qui est caractérisée par les sommets (3.), peut être déterminé par les égalités

$$\xi_i^{(0)} = \sum_{k=1}^{k=t} \vartheta_k \alpha_{ik}^{(h)} \quad \text{où} \quad \sum_{k=1}^{k=t} \vartheta_k = 1 \ \text{et} \ \vartheta_k \geqq 0. \qquad (k = 1, 2, \dots t)$$

Des inégalités précédentes, on tire

$$\varrho + a_{0h} + \Sigma a_{ih} \xi_i^{(0)} \leqq 0.$$

En observant que d'autre part on a

$$(4.) \qquad a_{0h} + \Sigma a_{ih} \xi_i \geqq 0,$$

on trouve, à cause de (2.),

$$(5.) \qquad \varrho + a_{0h} + \Sigma a_{ih} \xi_i' < 0.$$

En vertu des inégalités (4.) et (5.), l'écart $d(\xi_i, \xi_i')$ ne peut être inférieur à une limite fixe d.

36. Cela posé, examinons un contour fermé C dont les points ont l'écart mutuel qui ne surpasse pas δ. En supposant que

$$\delta < d,$$

on aura un contour C qui est situé dans des parallélloèdres contigus deux à deux.

Soit (ξ_i) un point quelconque du contour C appartenant au parallélloèdre R. Admettons que pas tous les points du contour C n'appartiennent à R et désignons par (ξ_i') un point du contour C qui n'appartient pas à R. Posons

$$(6.) \qquad \xi_i = \sum_{k=1}^{s} \vartheta_k \alpha_{ik} \quad \text{où} \quad \Sigma \vartheta_k = 1 \text{ et } \vartheta_k \geqq 0, \qquad (k=1,2,\dots s)$$

$$(7.) \qquad \xi_i' = \sum_{k=1}^{s} \vartheta_k' \alpha_{ik} \quad \text{où} \quad \Sigma \vartheta_k' = 1.$$

Comme le point (ξ_i') n'appartient pas à R, on aura parmi les nombres $\vartheta_1', \vartheta_2', \dots \vartheta_s'$ au moins un nombre qui sera négatif. Supposons, pour fixer les idées, que

$$(8.) \qquad \vartheta_1' \geqq 0, \dots \vartheta_\mu' \geqq 0 \text{ et } \vartheta_{\mu+1}' < 0, \dots \vartheta_s' < 0.$$

On peut choisir le paramètre ϑ si petit qu'on ait les inégalités

$$|\vartheta'_k - \vartheta_k| < \varepsilon, \qquad (k=1,2,\dots s) \tag{9.}$$

ε étant un paramètre positif aussi petit que l'on voudra. En vertu de (8.), il viendra

$$0 \leqq \vartheta_k < \varepsilon, \quad -\varepsilon < \vartheta'_k < 0. \qquad (k=\mu+1,\dots s) \tag{10.}$$

Observons que le plus grand nombre parmi les nombres $\vartheta_1, \vartheta_2, \dots \vartheta_s$ ne peut être inférieur à $\frac{1}{s}$ à cause de (6.). En supposant que

$$\varepsilon < \frac{1}{s},$$

on trouvera le nombre cherché parmi les nombres $\vartheta_1, \vartheta_2, \dots \vartheta_\mu$. Admettons, pour fixer les idées, que

$$\vartheta_1 > \frac{1}{s}.$$

En vertu de (9.), il viendra

$$\vartheta'_1 > \frac{1}{s} - \varepsilon. \tag{11.}$$

Nous avons démontré que le point (ξ'_i) ne peut appartenir qu'aux parallélloèdres $R_1, R_2, \dots R_\sigma$ qui sont contigus à R. En supposant que le point (ξ'_i) appartienne au parallélloèdre R_h, on aura une inégalité

$$a_{0h} + \Sigma a_{ih} \xi'_i < 0. \tag{12.}$$

En observant qu'en vertu des égalités (7.)

$$a_{0h} + \Sigma a_{ih} \xi'_i = \sum_{k=1}^{s} \vartheta'_k (a_{0h} + \Sigma a_{ih} \alpha_{ik}),$$

on obtient, à cause de (12.),

$$\sum_{k=1}^{s} \vartheta'_k (a_{0h} + \Sigma a_{ih} \alpha_{ik}) < 0.$$

De cette inégalité on tire, à cause de (10.) et (11.),

$$\frac{1}{s}(a_{0h}+\Sigma a_{ih}\alpha_{i1})-\varepsilon\left[a_{0h}\Sigma a_{ih}\alpha_{i1}+\sum_{k=\mu+1}^{s}(a_{0h}+\Sigma a_{ih}\alpha_{ik})\right]<0.$$

En posant

$$A=\frac{1}{s}(a_{0h}+\Sigma a_{ih}\alpha_{i1}) \text{ et } B=a_{0h}+\Sigma a_{ih}\alpha_{i1}+\sum_{k=\mu+1}^{s}(a_{0h}+\Sigma a_{ih}\alpha_{ik}),$$

admettons que $A>0$; l'inégalité précédente donne $B>0$, donc

$$\varepsilon>\frac{A}{B}. \tag{13.}$$

Observons que les nombres A et B ne changent pas quand on remplace le parallélloèdre R par un parallélloèdre quelconque de l'ensemble (R). On en conclut que le rapport $\frac{A}{B}$ qui ne s'annule pas possède un minimum positif ω.

En supposant que

$$\varepsilon<\omega,$$

l'inégalité (13.) devient impossible et il est nécessaire que $A=0$ ou autrement

$$a_{0h}+\Sigma a_{ih}\alpha_{i1}=0.$$

Nous sommes arrivés au résultat suivant: tous les parallélloèdres dans lesquels est situé le contour examiné C sont contigus par le sommet (α_{i1}).

A l'aide du lemme du n° 35, on démontrera aisément le théorème fondamental énoncé en répétant les raisonnements exposés au n° 28.

Propriétés fondamentales de la fonction génératrice $V(x_1, x_2, \dots x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n)$

37. *Théorème* I. *Supposons que deux vecteurs* $[\lambda_i]$ *et* $[\lambda_i^{(0)}]$ *caractérisent deux parallélloèdres* R *et* $R^{(0)}$ *de l'ensemble* (R). *On aura une inégalité*

$$V(x_1, x_2, \dots x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n) > V(x_1, x_2, \dots x_n, \lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, \dots \lambda_n^{(0)}),$$

à condition que le point (x_i) *soit intérieur au parallélloèdre* $R^{(0)}$.

Soit $(\xi_i^{(0)})$ un point quelconque qui est intérieur au parallélloèdre $R^{(0)}$.

Prenons un point (ξ_i) qui est intérieur au parallélloèdre R et examinons un vecteur $[\xi_i^{(0)}, \xi_i]$ déterminé par les égalités

$$x_i = \xi_i^{(0)} + u(\xi_i - \xi_i^{(0)}) \text{ où } 0 \leqq u \leqq 1.$$

Une partie du vecteur $[\xi_i^{(0)}, \xi_i]$ appartient au parallélloèdre R^0. Désignons

$$\xi_i' = \xi_i^{(0)} + u_1(\xi_i - \xi_i^{(0)}) \text{ où } 0 < u_1 < 1$$

et supposons que le vecteur $[\xi_i^{(0)}, \xi_i']$ présente la partie du vecteur $[\xi_i^{(0)}, \xi_i]$ qui appartient à $R^{(0)}$.

La seconde partie $[\xi_i', \xi_i]$ du vecteur $[\xi_i^{(0)}, \xi_i]$ ne possède qu'un seul point (ξ_i') commun au parallélloèdre $R^{(0)}$. Le point (ξ_i') appartient à une face $P^{(0)}(\nu)$ du parallélloèdre $R^{(0)}$. On choisira parmi les parallélloèdres qui sont contigus par la face $P^{(0)}(\nu)$ un parallélloèdre R' qui contient une partie du vecteur $[\xi_i', \xi_i]$.

Désignons

$$\xi_i'' = \xi_i + u_2(\xi_i - \xi_i^{(0)}) \text{ où } u_1 < u_2 \leqq 1$$

et supposons que le vecteur $[\xi_i', \xi_i'']$ présente une partie du vecteur $[\xi_i', \xi_i]$ qui appartient au parallélloèdre R' et ainsi de suite.

Supposons qu'on ait déterminé m points du vecteur $[\xi_i^{(0)}, \xi_i]$

$$(1.) \qquad \xi_i^{(k)} = \xi_i^{(0)} + u_k(\xi_i - \xi_i^{(0)}), \qquad (k=1, 2, \dots m)$$

où

$$(2.) \qquad 0 < u_1 < u_2 < \dots < u_m < 1$$

qui correspondent aux vecteurs $[\xi_i^{(0)}, \xi_i']$, $[\xi_i', \xi_i'']$, ... $[\xi_i^{(m)}, \xi_i]$ appartenant aux parallélloèdres

$$R^{(0)}, R', \dots R^{(m-1)}, R$$

contigus successivement.

Désignons par

$$a_0^{(k)} + \Sigma a_i^{(k)} x_i = 0, \qquad (k=0,1,2,\dots m-1)$$

l'équation canonique de la face commune aux parallélloèdres $R^{(k)}$ et $R^{(k+1)}$ qui est définie dans le parallélloèdre $R^{(k)}$.

En vertu de la définition établie au n° 32, on aura une formule

$$(3.) \qquad V(x_1, x_2, \dots x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n) = V(x_1, x_2, \dots x_n, \lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, \dots \lambda_n^{(0)}) + \sum_{k=0}^{m-1} (a_0^{(k)} + \Sigma a_i^{(k)} x_i).$$

Examinons les sommes

$$a_0^{(k)} + \Sigma a_i^{(k)} \xi_i^{(0)} \text{ et } a_0^{(k)} + \Sigma a_i^{(k)} \xi_i. \qquad (k=0,1,2,\dots m-1)$$

En vertu de la supposition faite, le point $(\xi_i^{(k+1)})$ vérifie l'équation

$$a_0^{(k)} + \Sigma a_i^{(k)} \xi_i^{(k+1)} = 0.$$

Comme le point $(\xi_i^{(k)})$ appartient au parallélloèdre $R^{(k)}$, on aura une inégalité

$$a_0^{(k)} + \Sigma a_i^{(k)} \xi_i^{(k)} \geqq 0.$$

En vertu de (1.) et (2.), on obtient

$$a_0^{(k)} + \Sigma a_i^{(k)} \xi_i^{(0)} \geqq 0 \text{ et } a_0^{(k)} + \Sigma a_i^{(k)} \xi_i < 0. \qquad (k=0,1,2,\dots m-1)$$

Comme le point $(\xi_i^{(0)})$ est intérieur au parallélloèdre $R^{(0)}$, on aura

$$a_0^{(0)} + \Sigma a_i^{(0)} \xi_i^{(0)} > 0 \text{ et } a_0^{(0)} + \Sigma a_i^{(0)} \xi_i < 0,$$

Il en résulte que

$$\sum_{k=0}^{m-1} (a_0^{(k)} + \Sigma a_i^{(k)} \xi_i^{(0)}) > 0 \text{ et } \sum_{k=0}^{m-1} (a_0^{(k)} + \Sigma a_i^{(k)} \xi_i) < 0.$$



En substituant dans la formule (3.), on obtient

$$V(\xi_1^{(0)}, \xi_2^{(0)}, \dots \xi_n^{(0)}, \lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n) > V(\xi_1^{(0)}, \xi_2^{(0)}, \dots \xi_n^{(0)}, \lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, \dots \lambda_n^{(0)})$$

et

$$V(\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n) < V(\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n, \lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, \dots \lambda_n^{(0)}).$$

Théorème II. *Supposons que les parallélloèdres $R^{(0)}, R', \dots R^{(n-\nu)}$ soient contigus par une face $P(\nu)$ à ν dimensions. En désignant par $[\lambda_i^{(k)}]$, $(k=0, 1, 2, \dots n-\nu)$ les vecteurs qui caractérisent ces parallélloèdres, on aura une inégalité*

$$V(x_1, x_2, \dots x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n) > V(x_1, x_2, \dots x_n, \lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, \dots \lambda_n^{(0)}),$$

à condition que le point (x_i) soit intérieur à la face $P(\nu)$ et que le vecteur $[\lambda_i]$ ne se trouve pas parmi les vecteurs $[\lambda_i^{(k)}]$, $(k=1, 2, \dots (n-\nu))$.

En supposant que $\lambda_i = \lambda_i^{(k)}$, on aura l'égalité

$$V(x_1, x_2, \dots x_n, \lambda_1^{(k)}, \lambda_2^{(k)}, \dots \lambda_n^{(k)}) = V(x_1, x_2, \dots x_n, \lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, \dots \lambda_n^{(0)}). \quad {\scriptstyle (k=1, 2, \dots (n-\nu))}$$

On démontrera aisément le théorème II énoncé en répétant les raisonnements qui ont été exposés précédemment.

38. Les résultats obtenus ouvrent une nouvelle voie pour les recherches concernant les parallélloèdres primitifs. On peut envisager l'ensemble (R) des parallélloèdres primitifs sous un nouveau point de vue, à savoir:

Chaque parallélloèdre $R^{(0)}$ de l'ensemble (R) caractérisé par le vecteur $[\lambda_i^{(0)}]$ présente un ensemble de points (x_i) vérifiant l'inégalité

$$V(x_1, x_2, \dots x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n) \geqq V(x_1, x_2, \dots x_n, \lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, \dots \lambda_n^{(0)}),$$

quel que soit le vecteur $[\lambda_i]$ appartenant au groupe G.

Nous avons vu au n° 32 que pour le parallélloèdre principal R_0 de l'ensemble (R) on a

$$V(x_1, x_2, \dots x_n, 0, 0, \dots 0) = 0.$$

Il s'ensuit que le parallélloèdre principal R_0 est défini par l'inégalité

$$V(x_1, x_2, \dots x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n) \geqq 0$$

qui subsiste, quel que soit le vecteur $[\lambda_i]$ du groupe G.

Détermination de la fonction génératrice $V(x_1, x_2, \dots x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n)$.

39. Supposons que le parallélloèdre principal R_0 soit déterminé à l'aide des inégalités canoniques

$$a_{0k} + \Sigma a_{ik} x_i \geqq 0. \qquad (k=1, 2, \dots \sigma)$$

Désignons par $[\lambda_{ik}]$ le vecteur qui définit une translation du parallélloèdre R_k en R_0 $(k=1, 2, \dots \sigma)$.

Prenons deux parallélloèdres R_k et R_h contigus au parallélloèdre R_0 par les faces P_k et P_h qui ne sont pas parallèles. Posons

$$\lambda = \lambda_k + \lambda_{ih}$$

et désignons par R le parallélloèdre de l'ensemble (R) caractérisé par le vecteur $[\lambda_i]$.

Le parallélloèdre R est contigu aux parallélloèdres R_k et R_h par les faces qui sont congruentes aux faces P_h et P_k.

On peut donc former deux séries

$$R_0, R_k, R \text{ et } R_0, R_h, R$$

de parallélloèdres qui sont succesivement contigus.

Supposons que le parallélloèdre R_k soit déterminé à l'aide des inégalités canoniques

$$u_k[a_{0r} + \Sigma a_{ir}(x_i + \lambda_{ik})] \geqq 0. \qquad (r=1, 2, \dots \sigma)$$

La face du parallélloèdre R_k qui est congruente à la face P_h sera déterminée par l'équation

$$u_k[a_{0h} + \Sigma a_{ih}(x_i + \lambda_{ik})] = 0.$$

Il en résulte que la fonction $V(x_1, x_2, \dots x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n)$ s'exprime par la somme

$$V(x_1, x_2, \dots x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n) = a_{0k} + \Sigma a_{ik} x_i + u_k [a_{0h} + \Sigma a_{ih} (x_i + \lambda_{ik})].$$

De la même manière, on obtient

$$V(x_1, x_2, \dots x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n) = a_{0h} + \Sigma a_{ih} x_i + u_h [a_{0k} + \Sigma a_{ik} (x_i + \lambda_{ih})].$$

En vertu du théorème fondamental du n° 34, on aura une identité

$$a_{0k} + \Sigma a_{ik} x_i + u_k [a_{0h} + \Sigma a_{ih} (x_i + \lambda_{ik})] = a_{0h} + \Sigma a_{ih} x_i + u_h [a_{0k} + \Sigma a_{ik} (x_i + \lambda_{ih})].$$

Il s'ensuit que

$$(1.) \qquad a_{0k} + u_k (a_{0h} + \Sigma a_{ih} \lambda_{ik}) = a_{0h} + u_h (a_{0k} + \Sigma a_{ik} \lambda_{ih})$$

et

$$a_{ik} + u_k a_{ih} = a_{ih} + u_h a_{ik}. \qquad (i=1, 2, \dots n)$$

Nous avons supposé que les coefficients a_{ik} et a_{ih}, $(i = 1, 2, \dots n)$ ne soient pas proportionnels, donc il est nécessaire que

$$u_k = 1 \text{ et } u_h = 1.$$

Nous sommes arrivés au résultat important suivant:

Chaque parallélloèdre R caractérisé par un vecteur $[\lambda_i]$ sera déterminé par les inégalités canoniques

$$a_{0k} + \Sigma a_{ik} (x_i + \lambda_i) \geqq 0. \qquad (k=1, 2, \dots \sigma)$$

Observons qu'en vertu de (1.), on aura l'égalité

$$\Sigma a_{ik} \lambda_{ih} = \Sigma a_{ih} \lambda_{ik}.$$

Dans cette égalité, on peut attribuer aux indices k et h les valeurs $k = 1, 2, \dots \sigma$; $h = 1, 2, \dots \sigma$.

40. *Théorème. Les vecteurs*

$$[\lambda_{i1}],\ [\lambda_{i2}], \dots\ [\lambda_{i\sigma}]$$

forment la base du groupe G. En posant

$$\lambda_i = \sum_{k=1}^{\sigma} l_k \lambda_{ik} \tag{2.}$$

où $l_1, l_2, \dots l_\sigma$ sont des nombres entiers arbitraires, on déterminera chaque vecteur $[\lambda_i]$ du groupe G. En désignant

$$a_i = \sum_{k=1}^{\sigma} l_k a_{ik}, \tag{3.}$$

on définira la fonction $V(x_1, x_2, \dots x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n)$ par la formule

$$V(x_1, x_2, \dots x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n) = \sum_{k=1}^{\sigma} l_k \Big(a_{0k} - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} a_{ik}\lambda_{ik} + \sum_{i=1}^{n} a_{ik} x_i\Big) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} a_i \lambda_i. \tag{4.}$$

Admettons que la formule (4.) soit vérifiée pour les vecteurs $[\lambda_i^{(0)}]$ et $[\lambda_i']$ qui sont définis par les égalités

$$\lambda_i^{(0)} = \sum_{k=1}^{n} l_k^{(0)} \lambda_{ik} \text{ et } \lambda_i' = \sum_{k=1}^{n} l_k' \lambda_{ik}. \qquad (i=1,2,\dots n) \tag{5.}$$

Nous allons voir que la formule (4.) sera aussi vraie pour le vecteur $[\lambda_i]$ déterminé par les égalités

$$\lambda_i = \lambda_i^{(0)} + \lambda_i'.$$

Désignons par $R, R^{(0)}$ et R' les parallélloèdres caractérisés par les vecteurs $[\lambda_i], [\lambda_i^{(0)}]$ et $[\lambda_i']$.

Le parallélloèdre $R^{(0)}$ sera déterminé par les inégalités canoniques

$$a_{0k} + \Sigma a_{ik}(x_i + \lambda_i^{(0)}) \geqq 0. \qquad (k=1,2,\dots \sigma)$$

On en conclut que la fonction $V(x_1, x_2, \dots x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n)$ s'exprime par la formule

$$(6.) \qquad V(x_1, x_2, \dots x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n) = V(x_1, x_2, \dots x_n, \lambda_1^{(1)}, \lambda_2^{(1)}, \dots \lambda_n^{(1)}) \\ + U(x_1, x_2, \dots x_n, \lambda_1', \lambda_2', \dots \lambda_n'),$$

où la fonction $U(x_1, x_2, \dots x_n, \lambda_1', \lambda_2', \dots \lambda_n')$ présente la fonction génératrice déterminée à condition que le parallélloèdre $R^{(1)}$ ait été choisi pour le parallélloèdre principal.

En désignant

$$(7.) \qquad a_i^{(1)} = \sum_{k=1}^{\sigma} l_k^{(1)} a_{ik} \quad \text{et} \quad a_i' = \sum_{k=1}^{\sigma} l_k' a_{ik}, \qquad (i=1, 2, \dots n)$$

on aura, en vertu de la supposition faite,

$$V(x_1, x_2, \dots x_n, \lambda_1^{(1)}, \lambda_2^{(1)}, \dots \lambda_n^{(1)}) = \sum_{k=1}^{\sigma} l_k^{(1)} \Big(a_{0k} - \frac{1}{2} \Sigma a_{ik} \lambda_{ik} + \Sigma a_{ik} x_i \Big) + \frac{1}{2} \Sigma a_i^{(1)} \lambda_i^{(1)},$$

$$U(x_1, x_2, \dots x_n, \lambda_1', \lambda_2', \dots \lambda_n') = \sum_{k=1}^{\sigma} l_k' \Big(a_{0k} + \Sigma a_{ik} \lambda_i^{(1)} - \frac{1}{2} \Sigma a_{ik} \lambda_{ik} + \Sigma a_{ik} x_i \Big) \\ + \frac{1}{2} \Sigma a_i' \lambda_i'.$$

Posons

$$l_k = l_k^{(1)} + l_k'. \qquad (k=1, 2, \dots \sigma)$$

En vertu de (6.) on obtient

$$(8.) \qquad V(x_1, x_2, \dots x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n) = \Sigma l_k \Big(a_{0k} - \frac{1}{2} \Sigma a_{ik} \lambda_{ik} + \Sigma a_{ik} x_i \Big) \\ + \frac{1}{2} \Sigma a_i^{(1)} \lambda_i^{(1)} + \frac{1}{2} \Sigma a_i' \lambda_i' + \sum_{k=1}^{\sigma} \sum_{i=1}^{\sigma} a_{ik} l_k' \lambda_i^{(1)}.$$

Examinons la somme

$$(9.) \qquad \frac{1}{2} \Sigma a_i^{(1)} \lambda_i^{(1)} + \frac{1}{2} \Sigma a_i' \lambda_i' + \sum_{k=1}^{\sigma} \sum_{i=1}^{n} a_{ik} l_k' \lambda_i^{(1)}.$$

En vertu de (5.), on aura

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ik}\lambda_i^{(0)} = \sum_{h=1}^{\sigma}\sum_{i=1}^{n} a_{ik}\, l_h^{(0)}\lambda_{ih}.$$

Nous avons vu au n° 39 que

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ik}\lambda_{ih} = \sum_{i=1}^{n} a_{ih}\lambda_{ik}, \tag{10.}$$

donc

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ik}\lambda_i^{(0)} = \sum_{h=1}^{\sigma}\sum_{i=1}^{n} a_{ih}\, l_h^{(0)}\lambda_{ik}$$

et, à cause de (7.), il vient

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ik}\lambda_i^{(0)} = \sum_{i=1}^{n} a_i^{(0)}\lambda_{ik}.$$

Il s'ensuit que

$$\sum_{k=1}^{\sigma}\sum_{i=1}^{n} a_{ik}\, l'_k\lambda_i^{(0)} = \Sigma\, a_i^{(0)}\lambda'_i.$$

En vertu de (7.), on aura aussi

$$\sum_{k=1}^{\sigma}\sum_{i=1}^{n} a_{ik}\, l'_k\lambda_i^{(0)} = \sum_{i=1}^{n} a'_i\lambda_i^{(0)}.$$

On peut donc présenter la somme (9.) sous la forme

$$\frac{1}{2}\Sigma\, a_i^{(0)}\lambda_i^{(0)} + \frac{1}{2}\Sigma\, a'_i\lambda'_i + \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ik}\, l'_k\lambda_i^{(0)} = \frac{1}{2}(\Sigma\, a_i^{(0)}\lambda_i^{(0)} + \Sigma\, a_i^{(0)}\lambda'_i + \Sigma\, a'_i\lambda_i^{(0)} + \Sigma\, a'_i\lambda'_i)$$
$$= \frac{1}{2}\Sigma(a_i^{(0)} + a_i^{(0)})(\lambda_i^{(0)} + \lambda'_i).$$

Comme

$$a_i^{(0)} + a'_i = a_i \quad \text{et} \quad \lambda_i^{(0)} + \lambda'_i = \lambda_i,$$

la formule (8.) peut s'écrire

$$V(x_1, x_2, \ldots x_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n) = \sum_{k=1}^{\sigma} l_k\Big(a_{0k} - \frac{1}{2}\Sigma\, a_{ik}\lambda_{ik} + \Sigma\, a_{ik}\, x_i\Big) + \frac{1}{2}\Sigma\, a_i\lambda_i.$$

Il est aisé de vérifier la formule (4.) dans les cas

$$\lambda_i = \pm \lambda_{ik}. \qquad (k=1,2,\dots\sigma)$$

Il en résulte que la formule (4.) subsiste, quel que soit le vecteur $[\lambda_i]$ appartenant au groupe G.

Théorème II. *Le groupe G possède une base formée de n vecteurs*

$$[\pi_{i1}],\ [\pi_{i2}], \dots [\pi_{in}].$$

En posant

$$\lambda_i = \sum_{k=1}^{n} l_k \pi_{ik} \tag{11.}$$

où $l_1, l_2, \dots l_n$ sont des nombres entiers arbitraires, on déterminera chaque vecteur $[\lambda_i]$ du groupe G. En désignant

$$V(x_1, x_2, \dots x_n,\ \pi_1, \pi_2, \dots \pi_n) = p_{0k} + \sum_{i=1}^{n} p_i x_i, \qquad (k=1,2,\dots n)$$

et

$$a_i = \sum_{k=1}^{n} l_k p_{ik}, \tag{12.}$$

on aura la formule

$$V(x_1, x_2, \dots x_n,\ \lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n) = \sum_{k=1}^{n} l_k \Big(p_{0k} - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} p_{ik}\pi_{ik} + \sum_{i=1}^{n} p_{ik} x_i\Big) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} a_i \lambda_i.$$

On démontrera aisement le théorème II énoncé à l'aide de la formule (4.).

Observons que la somme $\Sigma a_i \lambda_i$ présente, en vertu des égalités (11.) et (12.), une forme quadratique des variables entières $l_1, l_2, \dots l_n$

$$\Sigma a_i \lambda_i = \sum_{k=1}^{n} \sum_{h=1}^{n} A_{kh} l_k l_h,$$

où on a posé

$$A_{kh} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} p_{ik}\pi_{ih} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} p_{ih}\pi_{ik}. \qquad (k=1,2,\dots n;\ h=1,2,\dots n)$$

Nous allons voir que la forme quadratique obtenue $\Sigma\Sigma A_{kh} l_k l_h$ est positive.

Détermination du centre des parallélloèdres primitifs.

41. *Théorème* I. *Chaque parallélloèdre primitif possède un centre.*

Désignons par (ξ_i) le point vérifiant les égalités

$$(1.)\qquad p_{0k} - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} p_{ik}\,\pi_{ik} + \sum_{i=1}^{n} p_{ik}\,\xi_i = 0. \qquad (k=1,2,\dots n)$$

Je dis que le point (ξ_i) présente le centre du parallélloèdre principal R_0.

Pour le démontrer, posons

$$\lambda_{ih} = \sum_{k=1}^{n} l_k^{(h)}\,\pi_{ik}. \qquad (h=1,2,\dots\sigma)$$

En vertu du théorème II du n° 40, on obtient

$$V(x_1, x_2, \dots x_n, \lambda_{1h}, \lambda_{2h}, \dots \lambda_{nh}) = \Sigma\, l_k^{(h)} \left(p_{0k} - \frac{1}{2}\Sigma p_{ik}\pi_{ik} + \Sigma p_{ik} x_i\right) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} (p_{i1}\, l_1^{(h)} + \cdots + p_{in}\, l_n^{(h)})\,\lambda_{ih}.$$

D'autre part, en vertu de la définition établie au n° 32, on a

$$V(x_1, x_2, \dots x_n, \lambda_{1h}, \lambda_{2h}, \dots \lambda_{nh}) = a_{0h} + \Sigma a_{ih}\, x_i.$$

Il s'ensuit que

$$(2.)\qquad a_{ih} = \sum_{k=1}^{n} l_k^{(h)}\, p_{ik}, \qquad (h=1,2,\dots\sigma)$$

et

$$(3.)\qquad a_{0h} = \sum_{k=1}^{n} l_k^{(h)}\left(p_{0k} - \frac{1}{2}\Sigma p_{ik}\,\pi_{ik}\right) + \frac{1}{2}\Sigma a_{ih}\,\lambda_{ih}. \qquad (h=1,2,\dots\sigma)$$

Multiplions les égalités (1.) par $l_k^{(h)}$ et en attribuant à l'indice k les valeurs $1, 2, \dots n$, additionnons les égalités obtenues, il viendra, à cause

de (2.) et (3.),

$$(4.) \qquad a_{0h} - \frac{1}{2}\Sigma a_{ih}\lambda_{ih} + \Sigma a_{ih}\xi_i = 0. \qquad {\scriptstyle (h=1,2,\ldots\sigma)}$$

Cela posé, prenons un point quelconque (x_i) appartenant au parallélloèdre R_0.

Pour que le point (ξ_i) soit le centre du parallélloèdre R_0, il faut et il suffit que le point (x'_i) déterminé par les égalités

$$(5.) \qquad x'_i = 2\xi_i - x_i, \qquad {\scriptstyle (i=1,2,\ldots n)}$$

appartienne au parallélloèdre R_0 aussi.

En vertu de la supposition faite, on aura les inégalités

$$(6.) \qquad a_{0h} + \Sigma a_{ih}x_i \geqq 0. \qquad {\scriptstyle (h=1,2,\ldots\sigma)}$$

En observant qu'à cause de (4.) et (5.)

$$a_{0h} + \Sigma a_{ih}x'_i = -a_{0h} - \Sigma a_{ih}(x_i - \lambda_{ih})$$

et que l'inégalité

$$-a_{0h} - \Sigma a_{ih}(x_i - \lambda_{ih}) \geqq 0$$

se trouve parmi les inégalités (6.), on obtient

$$a_{0h} + \Sigma a_{ih}x'_i \geqq 0. \qquad {\scriptstyle (h=1,2,\ldots\sigma)}$$

Il est donc démontré que le point (ξ_i) présente le centre du parallélloèdre R_0.

Observons que le centre (ξ_i) est intérieur au parallélloèdre R_0.

Pour le démontrer, supposons qu'un point (x_i) soit intérieur au parallélloèdre R_0.

On aura les inégalités

$$a_{0h} + \Sigma a_{ih}x_i > 0. \qquad {\scriptstyle (h=1,2,\ldots\sigma)}$$

Parmi ces inégalités se trouvent les inégalités

$$-a_{0h} - \Sigma a_{ih}(x_i - \lambda_{ih}) > 0. \qquad (h=1,2, \ldots \sigma)$$

En faisant la somme de ces inégalités, on obtient

$$\Sigma a_{ih} \lambda_{ih} > 0, \qquad (h=1,2,\ldots \sigma)$$

et, à cause de l'égalité (4.), il vient

$$a_{0h} + \Sigma a_{ih} \xi_i > 0. \qquad (h=1,2,\ldots \sigma)$$

42. *Théorème* II. *La forme quadratique*

$$\sum_{i=1}^{n} (p_{i1} l_1 + p_{i2} l_2 + \cdots + p_{in} l_n)(\pi_{i1} l_1 + \pi_{i2} l_2 + \cdots + \pi_{in} l_n)$$

des variables entières $l_1, l_2, \ldots l_n$ *est positive.*

Appliquons le théorème I du n° 37 au centre (ξ_i) du parallélloèdre principal R_0, on aura l'inégalité

$$V(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n) > 0, \tag{7.}$$

quel que soit le vecteur $[\lambda_i]$ du groupe G, le vecteur $[0]$ étant exclu.

En vertu du théorème II du n° 40 et des égalités (1.), il vient

$$p(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n) = \frac{1}{2} \Sigma (p_{i1} l_1 + \cdots + p_{in} l_n)(\pi_{i1} l_1 + \cdots + \pi_{in} l_n)$$

et, à cause de (7.), on trouve

$$\Sigma (p_{i1} l_1 + p_{i2} l_2 + \cdots + p_{in} l_n)(\pi_{i1} l_1 + \pi_{i2} l_2 + \cdots + \pi_{in} l_n) > 0.$$

L'inégalité obtenue subsiste, quelles que soient les valeurs entières des variables $l_1, l_2, \ldots l_n$, le système $l_1 = 0,\ l_2 = 0,\ \ldots\ l_n = 0$ étant exclu.

Groupe continu de transformations linéaires des parallélloèdres primitifs.

43. Effectuons une transformation linéaire du parallélloèdre primitif principal R_0 à l'aide d'une substitution

$$x_i = \alpha_{i0} + \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} x'_k, \qquad (i=1,2,\dots n)$$

à coefficients réels quelconques et du déterminant qui ne s'annule pas.

On obtiendra un nouveau parallélloèdre primitif R' qui sera déterminé à l'aide des inégalités canoniques

$$a'_{0h} + \sum_{k=1}^{n} a'_{kh} x'_k \geqq 0, \qquad (h=1,2,\dots \sigma)$$

où on a posé

$$(1.) \qquad a'_{0h} = a_{0h} + \sum_{i=1}^{n} a_{ih} \alpha_{i0}, \quad a'_{kh} = \sum_{i=1}^{n} a_{ih} \alpha_{ik}. \quad (k=1,2,\dots n;\ h=1,2,\dots \sigma)$$

Le groupe G' de vecteurs correspondant au parallélloèdre obtenu R' sera déterminé par les égalités

$$(2.) \qquad \lambda_i = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} \lambda'_k,$$

à condition qu'au vecteur $[\lambda_i]$ du groupe G corresponde le vecteur $[\lambda'_i]$ dans le groupe G'.

Désignons

$$V(x_1, x_2, \dots x_n,\ \lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n) = p_0 + \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$$

et

$$V(x'_1, x'_2, \dots x'_n,\ \lambda'_1, \lambda'_2, \dots \lambda'_n) = p'_0 + \sum_{i=1}^{n} p'_i x_i.$$

En vertu de la formule (4.) du n° 40 et des égalités (1.) et (2.), on obtient

$$p'_0 = p_0 + \sum_{i=1}^{n} p_i \alpha_{i0}, \qquad p'_k = \sum_{i=1}^{n} p_i \alpha_{ik}. \qquad (k=1,2,\dots n)$$

Il en résulte que $[\pi_i]$ et $[\pi'_i]$ étant deux vecteurs correspondants quelconques, on aura

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \pi_i = \sum_{i=1}^{n} p'_i \pi'_i. \tag{3.}$$

Théorème. La forme quadratique

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{h=1}^{n} A_{kh} l_k l_h = \sum_{i=1}^{n} (p_{i1} l_1 + p_{i2} l_2 + \cdots + p_{in} l_n)(\pi_{i1} l_1 + \pi_{i2} l_2 + \cdots + \pi_{in} l_n)$$

présente un invariant dans le groupe continu de transformations linéaires.

Le théorème énoncé est évident en vertu de l'égalité (3.).

44. Effectuons une transformation des parallélloèdres primitifs de l'ensemble (R) à l'aide d'une substitution

$$p_{0k} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} p_{ik} \pi_{ik} + \sum_{i=1}^{n} p_{ik} x_i = x'_k. \qquad (k=1,2,\ldots n)$$

On obtiendra un ensemble de parallélloèdres primitifs (R').

La valeur correspondante de la fonction $V(x'_1, x'_2, \ldots x'_n, \lambda'_1, \lambda'_2, \ldots \lambda'_n)$ pour l'ensemble (R') sera exprimée par la formule

$$V(x'_1, x'_2, \ldots x'_n, \lambda'_1, \lambda'_2, \ldots \lambda'_n) = \sum_{i=1}^{n} l_i x'_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} A_{ij} l_i l_j.$$

En vertu du théorème du n° 38, le parallélloèdre principal de l'ensemble (R') sera déterminé par les inégalités

$$\frac{1}{2} \Sigma\Sigma A_{ij} l_i l_j + \sum_{i=1}^{n} l_i x_i \geqq 0$$

qui subsistent, quelles que soient les valeurs entières de $l_1, l_2, \ldots l_n$.

Les différents parallélloèdres de l'ensemble (R') seront déterminés par les inégalités

$$\frac{1}{2} \Sigma\Sigma A_{ij} l_i l_j + \Sigma l_i x_i \geqq \frac{1}{2} \Sigma\Sigma A_{ij} l_i^{(0)} l_j^{(0)} + \Sigma l_i^{(0)} x_i. \tag{4.}$$

Chaque paralléloèdre de l'ensemble (R') sera caractérisé par un système correspondant $(l_i^{(t)})$ de nombres entiers $l_1^{(t)}, l_2^{(t)}, \ldots l_n^{(t)}$.

Observons qu'on pourrait remplacer la base du groupe G formée de n vecteurs par une autre base formée de n vecteurs aussi, ces deux bases seront équivalentes, en vertu du théorème III du n° 11; la forme quadratique positive correspondante $\Sigma\Sigma A_{ij} l_i l_j$ sera remplacée par une forme équivalente; les inégalités (4.) définissent dans ce cas l'ensemble des paralléloèdres qui peut être transformé en l'ensemble (R') à l'aide d'une substitution linéaire correspondante à coefficients entiers et du déterminant ± 1.

Le remarquable théorème suivant est donc démontré.

Théorème. En effectuant les transformations linéaires d'un paralléloèdre primitif à l'aide de substitutions à coefficients réels quelconques qui forment un groupe continu de substitutions linéaires, on obtient un ensemble de paralléloèdres primitifs qui est parfaitement déterminé par une classe de formes quadratiques positives équivalentes, à condition qu'on ne considère pas comme différentes les formes quadratiques à coefficients proportionnels.

Nous allons voir que chaque forme quadratique positive définit, à l'aide des inégalités (4.), un ensemble de paralléloèdres congruents qui peuvent être primitifs ou imprimitifs.

Section III.

Détermination des paralléloèdres à l'aide des formes quadratiques positives.

Définition du polyèdre convexe correspondant à une forme quadratique positive.

45. Soit $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$ une forme quadratique positive arbitraire à n variables $x_1, x_2, \ldots x_n$. Envisageons un ensemble R de points (α_i) vérifiant l'inégalité

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j + 2\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \geqq 0,$$

quelles que soient les valeurs entières de $x_1, x_2, \ldots x_n$.

En vertu de la définition établie, l'ensemble R jouit des propriétés suivantes:

1. *L'ensemble R est à n dimensions.*
2. *Le point* (0) *présente le centre de l'ensemble R.*
3. *L'ensemble R est convexe.*

Prenons un système de paramètres arbitraires $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_n$ et examinons un vecteur g composé de points (α_i) qui sont déterminés par les égalités

$$\alpha_i = \varrho \varepsilon_i \quad \text{où} \quad \varrho \geqq 0.$$

Il est aisé de démontrer qu'il existe un intervalle

$$0 \leqq \varrho \leqq \varrho_0 \quad \text{où} \quad \varrho_0 > 0$$

qui correspond aux points du vecteur g appartenant à l'ensemble R.

En posant

$$\alpha_{i0} = \varrho_0 \varepsilon_i,$$

on obtient un vecteur $[\alpha_{i0}]$ dont les points appartiennent à l'ensemble R. Le point (α_{i0}) appartient à la frontière de l'ensemble R, c'est-à-dire: le point (α_{i0}) vérifie l'inégalité

$$\Sigma \Sigma a_{ij} x_i x_j + 2 \Sigma \alpha_{i0} x_i \geqq 0, \tag{1.}$$

quelles que soient les valeurs entières de $x_1, x_2, \ldots x_n$ et vérifie au moins une égalité

$$\Sigma \Sigma a_{ij} l_i l_j + 2 \Sigma \alpha_{i0} l_i = 0, \tag{2.}$$

$l_1, l_2, \ldots l_n$ étant des nombres entiers qui ne s'annulent pas.

Désignons

$$\alpha_{i1} = -\alpha_{i0} - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} l_j, \qquad (i = 1, 2, \ldots n) \tag{3.}$$

on aura, à cause de (2.), l'égalité

$$\Sigma \Sigma a_{ij} x_i x_j + 2 \Sigma \alpha_{i1} x_i = \Sigma \Sigma a_{ij} (l_i - x_i)(l_j - x_j) + 2 \Sigma \alpha_{i0} (l_i - x_i) \quad .$$



et, en vertu de (1.), on obtient

$$\Sigma\Sigma a_{ij}x_ix_j + 2\Sigma\alpha_{i1}x_i \geqq 0, \tag{4.}$$

donc le point (α_{i1}) appartient à l'ensemble R aussi.

En faisant la somme des inégalités (1.) et (4.), on trouve, à cause de (3.),

$$\Sigma\Sigma a_{ij}x_ix_j - \Sigma\Sigma a_{ij}x_i l_j \geqq 0.$$

L'inégalité obtenue subsiste, quelles que soient les valeurs entières de $x_1, x_2, \dots x_n$; cette inégalité peut s'écrire

$$\Sigma\Sigma a_{ij}l_il_j \leqq \Sigma\Sigma a_{ij}(l_i - 2x_i)(l_j - 2x_j).$$

On en conclut que le système (l_i) n'est autre chose qu'une représentation du minimum de la forme quadratique positive $\Sigma\Sigma a_{ij}x_ix_j$ déterminée dans l'ensemble composé de tous les systèmes de nombres entiers qui sont congrus au système (l_i) par rapport au module 2.

Le nombre des systèmes pareils est fini. Supposons que tous ces systèmes forment une série

$$(l_{i1}), (l_{i2}), \dots (l_{i\sigma}). \tag{5.}$$

46. *Théorème. L'ensemble R présente un polyèdre convexe déterminé à l'aide des inégalités*

$$\Sigma\Sigma a_{ij}l_{ik}l_{jk} + 2\Sigma\alpha_i l_{ik} \geqq 0. \qquad (k = 1, 2, \dots \sigma) \tag{6.}$$

En vertu de la définition établie, chaque point (α_i) de l'ensemble R vérifie ces inégalités. Admettons qu'un point (α_i) vérifiant ces inégalités n'appartienne pas à l'ensemble R. On déterminera dans ce cas une valeur positive du paramètre ϱ dans l'intervalle $0 < \varrho < 1$, de manière qu'en posant

$$\alpha_i^{(0)} = \varrho\,\alpha_i \quad \text{où} \quad 0 < \varrho < 1, \tag{7.}$$

on obtienne un point $(\alpha_i^{(0)})$ appartenant à la frontière de l'ensemble R. Le point $(\alpha_i^{(0)})$ vérifiera, comme nous l'avons vu, une égalité

$$\Sigma\Sigma a_{ij} l_i l_j + 2\Sigma \alpha_i^{(0)} l_i = 0 \tag{8.}$$

caractérisée par un système (l_i) appartenant à la série (6.).

En vertu de l'égalité obtenue, on trouve

$$\Sigma \alpha_i^{(0)} l_i < 0$$

et, à cause de (7.), il vient

$$\Sigma \alpha_i l_i < 0.$$

En présentant l'égalité (8.) sous la forme

$$\Sigma\Sigma a_{ij} l_i l_j + 2\Sigma \alpha_i l_i = 2(1-\varrho)\Sigma \alpha_i l_i,$$

on aura l'inégalité

$$\Sigma\Sigma a_{ij} l_i l_j + 2\Sigma \alpha_i l_i < 0,$$

ce qui est contre l'hypothèse.

Inégalités indépendantes qui définissent le polyèdre convexe correspondant à une forme quadratique positive.

47. Il peut arriver que parmi les inégalités (6.) du n° précédent se trouvent des inégalités dépendantes. Admettons, par exemple, que l'inégalité

$$\Sigma\Sigma a_{ij} l_i l_j + 2\Sigma \alpha_i l_i \geqq 0 \tag{1.}$$

soit dépendante. On aura dans ce cas une identité

$$\Sigma\Sigma a_{ij} l_i l_j + 2\Sigma \alpha_i l_i = \varrho_0 + \sum_{k=1}^{\sigma} \varrho_k (\Sigma\Sigma a_{ij} l_{ik} l_{jk} + 2\Sigma \alpha_i l_{ik}) \tag{2.}$$

où

$$\varrho_0 \geqq 0, \quad \varrho_k \geqq 0. \qquad (k=1,2,\dots\sigma)$$

Nous avons vu au n° 45 que l'inégalité

$$\Sigma\Sigma a_{ij}x_i x_j - \Sigma\Sigma a_{ij} x_i l_j \geq 0$$

subsiste quelles que soient les valeurs entières de $x_1, x_2, \ldots x_n$.

En faisant dans l'identité (2.)

$$\alpha_i = -\frac{1}{2}\Sigma a_{ij} l_j,$$

on obtient

$$\varrho_0 + \Sigma \varrho_k (\Sigma\Sigma a_{ij} l_{ik} l_{jk} - \Sigma\Sigma a_{ij} l_{ik} l_j) = 0,$$

et par suite

$$\varrho_0 = 0, \quad \varrho_k (\Sigma\Sigma a_{ij} l_{ik} l_{jk} - \Sigma\Sigma a_{ij} l_{ik} l_j) = 0. \qquad (k=1, 2, \ldots \sigma)$$

En supposant que $\varrho_k \neq 0$, on aura

$$\Sigma\Sigma a_{ij} l_{ik} l_{jk} - \Sigma\Sigma a_{ij} l_{ik} l_j = 0,$$

donc

$$\Sigma\Sigma a_{ij} l_i l_j = \Sigma\Sigma a_{ij} (l_i - 2 l_{ik})(l_j - 2 l_{jk}).$$

En vertu de l'égalité obtenue, le système $(l_i - 2 l_{ik})$ se trouve dans la série (5.) du n° 45. C'est une condition nécessaire pour que l'inégalité (1.) soit dépendante.

48. *Théorème. Pour qu'une inégalité*

$$(3.) \qquad \Sigma\Sigma a_{ij} l_i l_j + 2\Sigma \alpha_i l_i > 0$$

soit indépendante, il faut et il suffit que la forme quadratique $\Sigma\Sigma a_{ij} x_i x_j$ ne possède que deux représentations (l_i) et $(-l_i)$ du minimum dans l'ensemble composé de tous les systèmes de nombres entiers qui sont congrus au système (l_i) par rapport au module 2.

Nous avons démontré que la condition énoncée est suffisante. Il reste à démontrer que cette condition est nécessaire.

Admettons que l'inégalité (3.) soit indépendante. Dans ce cas, l'équation

$$\Sigma\Sigma a_{ij} l_i l_j + 2\Sigma \alpha_i l_i = 0$$

définit une face P à $n-1$ dimensions du polyèdre R.

Soit (α_i) un point qui est intérieur à la face P. On aura l'inégalité

$$\Sigma\Sigma a_{ij} x_i x_j + 2\Sigma \alpha_i x_i > 0, \tag{4.}$$

quelles que soient les valeurs entières de $x_1, x_2, \ldots x_n$, les deux systèmes (0) et (l_i) étant exclus. En posant, comme nous l'avons fait au n° 45,

$$\alpha'_i = -\alpha_i - \Sigma a_{ij} l_j, \tag{5.}$$

on aura aussi une inégalité

$$\Sigma\Sigma a_{ij} x_i x_j + 2\Sigma \alpha'_i x_i > 0 \tag{6.}$$

qui subsiste, quelles que soient les valeurs entières de $x_1, x_2 \ldots x_n$, les deux systèmes (0) et (l_i) étant exclus. En faisant la somme des inégalités (4.) et (6.), on trouve, à cause de (5.),

$$\Sigma\Sigma a_{ij} x_i x_j - \Sigma a_{ij} x_i l_j > 0$$

ou autrement

$$\Sigma\Sigma a_{ij} l_i l_j < \Sigma\Sigma a_{ij} (l_i - 2x_i)(l_j - 2x_j).$$

L'inégalité obtenue subsiste, quelles que soient les valeurs entières de $x_1, x_2, \ldots x_n$, les deux systèmes (0) et (l_i) étant exclus.

Le théorème énoncé est donc démontré.

Corollaire. Le nombre des inégalités indépendantes qui définissent le polyèdre R correspondant à une forme quadratique positive ne peut pas surpasser la limite $2(2^n - 1)$.

Ensemble (R) de parallélloèdres défini par une forme quadratique positive.

49. *Théorème. Supposons que le polyèdre convexe R correspondant à une forme quadratique positive $\Sigma\Sigma a_{ij} x_i x_j$ soit déterminé à l'aide des inégalités*

$$\Sigma\Sigma a_{ij} x_i x_j + 2\Sigma \alpha_i x_i \geqq 0.$$

En effectuant les translations du polyèdre R le long des vecteurs déterminés par les égalités

$$\lambda_i = -\Sigma a_{ij} l_j,$$

$l_1, l_2, \ldots l_n$ étant des nombres entiers arbitraires, on composera un ensemble (R) de polyèdres congruents qui partagent uniformément l'espace à n dimensions.

Désignons par R' le polyèdre qu'on obtient à l'aide d'une translation du polyèdre R le long du vecteur $[\lambda_i]$. Le polyèdre R' sera déterminé par les inégalités

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j + 2 \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} l_j) x_i \geqq 0.$$

Cette inégalité peut s'écrire

$$\Sigma\Sigma a_{ij}(x_i + l_i)(x_j + l_j) + 2\Sigma \alpha_i (x_i + l_i) \geqq \Sigma\Sigma a_{ij} l_i l_j + 2\Sigma \alpha_i l_i.$$

On en conclut que le polyèdre R' sera déterminé par les inégalités

$$(1.) \qquad \Sigma\Sigma a_{ij} x_i x_j + 2\Sigma \alpha_i x_i \geqq \Sigma\Sigma a_{ij} l_i l_j + 2\Sigma \alpha_i l_i$$

qui subsistent, quelles que soient les valeurs entières des variables $x_1, x_2, \ldots x_n$.

On dira que le polyèdre R' congruent au polyèdre R est caractérisé par le système (l_i).

Désignons par (R) l'ensemble de tous les polyèdres congruents au polyèdre R et qui sont caractérisés par les différents systèmes (l_i) de nombres entiers.

Je dis que l'ensemble (R) remplit uniformément l'espace à n dimensions.

Prenons un point arbitraire (α_i) dans l'espace à n dimensions et cherchons le polyèdre de l'ensemble (R) auquel appartient le point (α_i). A cet effet, déterminons une représentation (l_i) du minimum de la forme

$$\Sigma\Sigma a_{ij} x_i x_j + 2\Sigma \alpha_i x_i$$

dans l'ensemble E composé de tous les systèmes (x_i) de valeurs entières des variables $x_1, x_2, \ldots x_n$.

On aura l'inégalité

$$\Sigma\Sigma a_{ij}x_ix_j+2\,\Sigma\alpha_ix_i \geqq \Sigma\Sigma a_{ij}l_il_j+2\,\Sigma\alpha_il_i$$

qui subsiste dans l'ensemble E. Il en résulte que le point (α_i) appartient au polyèdre de l'ensemble (R) caractérisé par le système (l_i).

Admettons que le point (α_i) appartienne aux différents polyèdres de l'ensemble (R): $R, R', \dots R^{(\mu)}$ caractérisés par les systèmes

$$(2.)\qquad (l_i), (l_{i1}), \dots (l_{i\mu}).$$

En vertu de (1.), on obtient les égalités

$$(3.)\qquad \Sigma\Sigma a_{ij}l_{ik}l_{jk}+2\,\Sigma\alpha_il_{ik}=\Sigma\Sigma a_{ij}l_il_j+2\,\Sigma\alpha_il_i. \qquad (k=1,2,\dots\mu)$$

Il s'ensuit qu'on aura l'inégalité

$$\Sigma\Sigma a_{ij}x_ix_j+2\,\Sigma\alpha_ix_i > \Sigma\Sigma a_{ij}l_il_j+2\,\Sigma\alpha_il_i,$$

quelles que soient les valeurs entières de $x_1, x_2, \dots x_n$, les systèmes (2.) étant exclus.

On en conclut que le point (α_i) est intérieur à une face commune aux polyèdres $R, R', \dots R^{(\mu)}$ et définie par les équations (3.).

Nous sommes arrivés au résultat suivant:

Chaque forme quadratique positive définit un ensemble (R) de parallélloèdres congruents qui peuvent être primitifs ou imprimitifs.

Algorithme pour la recherche du minimum de la forme $\Sigma\Sigma a_{ij}x_ix_j+2\,\Sigma\alpha_ix_i$ dans l'ensemble E.

50. Supposons qu'on ait déterminé les inégalités indépendantes

$$\Sigma\Sigma a_{ij}l_{ik}l_{jk}+2\,\Sigma\alpha_il_{ik} \geqq 0 \qquad (k=1,2,\dots\sigma)$$

qui définissent le parallélloèdre R correspondant à une forme quadratique positive $\Sigma\Sigma a_{ij}x_ix_j$.

A l'aide des systèmes

$$(l_{i1}), (l_{i2}), \dots (l_{i\sigma})$$

de nombres entiers, on peut résoudre plusieurs problèmes de la théorie arithmétique des formes quadratiques positives.

Cherchons, par exemple, le minimum de la forme

$$(1.)\qquad \Sigma\Sigma a_{ij}\, x_i x_j + 2\,\Sigma\, \alpha_i x_i$$

dans l'ensemble E composé de tous les systèmes (x_i) de nombres entiers, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ étant des paramètres arbitraires donnés.

Les valeurs de $x_1, x_2, \ldots x_n$ qui correspondent au minimum absolu de la fonction (1.) vérifient les équations

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ik} x_i + \alpha_k = 0. \qquad (k=1,2,\ldots n)$$

Désignons par (ξ_i) le point vérifiant ces équations. En posant

$$\xi_i = l_i + r_i,$$

déterminons les nombres entiers $l_1, l_2, \ldots l_n$ d'après les conditions

$$|r_i| \leqq \frac{1}{2}. \qquad (i=1,2,\ldots n)$$

Dans le cas $r_i = 0\ (i=1,2,\ldots n,)$ le système (l_i) est celui qu'on a cherché. Admettons que tous les nombres $r_i (i=1,2,\ldots n)$ ne s'annulent pas. Posons

$$\alpha_i^{(0)} = \alpha_i + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, l_j$$

et examinons le point $(\alpha_i^{(0)})$. Admettons que le point $(\alpha_i^{(0)})$ appartienne au parallélloèdre R. Il en résulte que le point (α_i) appartient au parallélloèdre de l'ensemble (R) qui est caractérisé par le système (l_i), donc ce système représente le minimum de la forme (1.).

Dans le cas où le point $(\alpha_i^{(0)})$ n'appartient pas au parallélloèdre R, déterminons une valeur ϱ_0 dans l'intervalle $0 < \varrho_0 < 1$ du paramètre ϱ, de manière que le point $(\varrho_0\, \alpha_i^{(0)})$ appartienne à une face du parallélloèdre R. Supposons que cette face soit déterminée par l'équation

$$\Sigma\Sigma a_{ij}\, l_{ih}\, l_{jh} + 2\,\Sigma\, \alpha_i\, l_{ih} = 0.$$

On aura une égalité

$$\Sigma\Sigma a_{ij} l_{ih} l_{jh} + 2\varrho_0 \Sigma \alpha_i^0 l_{ih} = 0 \text{ où } 0 < \varrho_0 < 1.$$

Posons

$$\alpha_i' = \alpha_i^0 + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} l_{jh}$$

et examinons de nouveau le point (α_i') et ainsi de suite. Je dis qu'on déterminera toujours une représentation du minimum de la forme (1.) en répétant plusieurs fois le procédé exposé. Pour le démontrer, supposons qu'on ait déterminé à l'aide de l'algorithme exposé une série de points

$$(2.) \qquad (\alpha_i^{(0)}),\ (\alpha_i'),\ \dots\ (\alpha_i^{(k)}),\ \dots$$

et une série de systèmes

$$(l_i^{(0)}),\ (l_i'),\ \dots\ (l_i^{(k)})\dots,$$

vérifiant les égalités

$$(3.) \qquad \alpha_i^{(k)} = \alpha_i^{(k-1)} + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} l_j^{(k-1)}, \qquad (k=1,2\dots)$$

et les égalités

$$\Sigma\Sigma a_{ij} l_i^{(k)} l_j^{(k)} + 2\Sigma \varrho_k \alpha_i^{(k)} l_i^{(k)} = 0 \text{ où } 0 < \varrho_k < 1. \qquad (k=0,1,2,\dots)$$

En vertu de ces égalités, on trouve

$$(4.) \qquad \Sigma\Sigma a_{ij} l_i^{(k)} l_j^{(k)} + 2\Sigma \alpha_i^{(k)} l_i^{(k)} < 0. \qquad (k=0,1,2,\dots)$$

En désignant

$$(5.) \qquad m_i^{(k)} = l_i + l_i^{(0)} + \dots + l_i^{(k-1)} \qquad (k=1,2,\dots)$$

et

$$m_i^{(0)} = l_i,$$

on obtient, à cause de (3.),

$$(6.) \qquad \alpha_i^{(k)} = \alpha_i + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} m_j^{(k)}. \qquad (k=0,1,2,\dots)$$

En substituant dans l'inégalité (4.), on trouve

$$\Sigma\Sigma a_{ij}(l_i^{(k)}+m_i^{(k)})(l_j^{(k)}+m_j^{(k)})+2\Sigma\alpha_i(l_i^{(k)}+m_i^{(k)})<\Sigma\Sigma a_{ij}m_i^{(k)}m_j^{(k)}+2\Sigma\alpha_i m_i^{(k)}.$$

Cette inégalité, à cause de (5.), peut s'écrire

$$\Sigma\Sigma a_{ij}m_i^{(k+1)}m_j^{(k+1)}+2\Sigma\alpha_i m_i^{(k+1)}<\Sigma\Sigma a_{ij}m_i^{(k)}m_j^{(k)}+2\Sigma\alpha_i m_i^{(k)}. \quad (k=0,1,2,\ldots)$$

Le nombre des systèmes $(m_i^{(k)})$ de nombres entiers vérifiant ces inégalités est limité. On en conclut que la série des points (2.) se terminera toujours par un point $(\alpha_i^{(k)})$ appartenant au paralléloèdre R. En vertu de l'égalité (6.), le système $(m_i^{(k)})$ représente le minimum de la forme $\Sigma\Sigma a_{ij}x_ix_j+2\Sigma\alpha_ix_i$ dans l'ensemble E.

Il reste à déterminer toutes les représentations du minimum de la forme examinée dans l'ensemble E. Le problème posé se ramène à la recherche de tous les paralléloèdres de l'ensemble (R) qui sont contigus par une face à l'intérieur de laquelle se trouve le point $(\alpha_i^{(k)})$. On déterminera tous ces paralléloèdres en examinant successivement les paralléloèdres qui sont contigus à R par les faces à $n-1$ dimensions et ainsi de suite.

Propriétés des systèmes de nombres entiers qui caractérisent les faces à $n-1$ dimensions du paralléloèdre correspondant à une forme quadratique positive.

51. Supposons que les systèmes

$$(1.)\qquad \pm(l_{i1}),\ \pm(l_{i2}),\ \ldots\ \pm(l_{i\tau})$$

caractérisent les faces à $n-1$ dimensions du paralléloèdre R correspondant à une forme quadratique positive $\Sigma\Sigma a_{ij}x_ix_j$.

Théorème I. *Les éléments $l_{1k}, l_{2k}, \ldots l_{nk}$ de chaque système (l_{ik}) appartenant à la série* (1.) *n'ont pas de diviseur commun.*

Nous avons vu au n° 45 que les nombres $l_{1k}, l_{2k}, \ldots l_{nk}$ vérifient l'inégalité

$$\Sigma\Sigma a_{ij}x_ix_j-\Sigma\Sigma a_{ij}x_il_{jk}\geqq 0$$

dans l'ensemble E. En admettant que

$$l_{ik} = \delta t_i \text{ où } \delta \geqq 1$$

et en posant $x_i = t_i$ dans l'inégalité précédente, on trouve

$$\Sigma\Sigma a_{ij} t_i t_j - \delta \Sigma\Sigma a_{ij} t_i t_j \geqq 0,$$

et il est nécessaire que $\delta = 1$.

52. *Théorème* II. *Supposons que n systèmes*

$$(2.) \qquad (p_{i1}),\ (p_{i2}), \dots\ (p_{in})$$

représentent n minima consécutifs

$$M_1 \leqq M_2 \leqq \dots M_n$$

de la forme quadratique positive $\Sigma\Sigma a_{ij} x_i x_j$. *Tous les systèmes* (2.) *se trouvent dans la série* (1.).

En vertu de la définition du système de n minima consécutifs, on aura une inégalité

$$M_k = \Sigma\Sigma a_{ij} p_{ik} p_{jk} \leqq \Sigma\Sigma a_{ij} x_i x_j, \qquad (k=1,2,\dots n)$$

tant que les nombres entiers $x_1, x_2, \dots x_n$ ne peuvent être présentés sous la forme

$$x_i = \sum_{r=1}^{k-1} u_r p_{ir},$$

le système (0) étant exclu.

Admettons que le système (p_{ik}) n'appartienne pas à la série (1.). Dans ce cas il existe un système (t_i) de nombres entiers vérifiant l'inégalité

$$\Sigma\Sigma a_{ij} p_{ik} p_{jk} \geqq \Sigma\Sigma a_{ij} (p_{ik} - 2t_i)(p_{jk} - 2t_j)$$

ou autrement l'inégalité

$$\Sigma\Sigma a_{ij} p_{ik} t_j \geqq \Sigma\Sigma a_{ij} t_i t_j.$$

En posant

$$(3.) \qquad q_i = p_{ik} - t_i,$$

on présentera l'inégalité précédente sous la forme

$$(4.)\qquad \Sigma\Sigma a_{ij} t_i t_j + \Sigma\Sigma a_{ij} q_i q_j \leqq \Sigma\Sigma a_{ij} p_{ik} p_{jk}.$$

En supposant que les deux systèmes (t_i) et (q_i) diffèrent du système (0), on aura, en vertu de l'inégalité obtenue, les égalités

$$t_i = \sum_{r=1}^{k-1} u_r p_{ir},\quad q_i = \sum_{r=1}^{k-1} v_r p_{ir}$$

et, à cause de (3.), il vient

$$p_{ik} = \sum_{r=1}^{k-1} (u_r + v_r) p_{ir}.$$

Les égalités obtenues sont impossibles, puisqu'autrement le déterminant de n systèmes (2.) s'annulerait, ce qui est contre l'hypothèse.

Il en résulte que l'inégalité (4.) ne subsiste qu'à condition que

$$\text{ou } t_i = 0 \text{ ou } t_i = p_{ik}. \qquad (i = 1, 2, \ldots n)$$

Il est donc démontré que le système (p_{ik}), $(k = 1, 2, \ldots n)$ appartient à la série (1.).

Corollaire. Toutes les représentations du minimum arithmétique de la forme quadratique positive $\Sigma\Sigma a_{ij} x_i x_j$ *se trouvent dans la série* (1.).

53. *Théorème* III. *La valeur numérique du déterminant de n systèmes quelconques appartenant à la série* (1.) *est inférieure à* $n!$.

Choisissons dans la série (1.) n systèmes quelconques

$$(l_{i1}), (l_{i2}), \ldots (l_{in})$$

dont le déterminant $\pm\omega$ ne s'annule pas. Désignons

$$(5.)\qquad \alpha_{ik}^{(0)} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} l_{jk} \quad \text{et} \quad \alpha'_{ik} = -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} l_{jk}. \qquad (k = 1, 2, \ldots n)$$

En vertu des inégalités

$$\Sigma\Sigma a_{ij} x_i x_j \pm \Sigma\Sigma a_{ij} x_i l_{jk} \geqq 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots \tau)$$

qui subsistent dans l'ensemble E, $2n$ points (5.) appartiennent au paralléloèdre R correspondant à la forme quadratique $\Sigma\Sigma a_{ij}x_i x_j$.

Choisissons n points quelconques parmi $2n$ points (5.), ayant égard à ce que les deux points correspondant à une même valeur de l'indice k ne se trouvent pas parmi les points choisis. On formera de cette manière 2^n systèmes composés de n points

$$(\alpha^{(0)}_{ih_1}), (\alpha^{(0)}_{ih_2}), \ldots (\alpha^{(0)}_{ih_\mu}), (\alpha'_{ih_{\mu+1}}), \ldots (\alpha'_{ih_n}),$$

$h_1, h_2, \ldots h_n$ étant une permutation quelconque des indices $1, 2, \ldots n$ et $\mu = 0, 1, 2, \ldots n$.

Désignons, pour abréger,

$$(6.)\qquad \alpha^{(h)}_{ik} = \alpha^{(0)}_{ih_k}, \quad (k=1,2,\ldots\mu) \qquad \alpha^{(h)}_{ik} = \alpha'_{ih_k}, \quad (k=\mu+1,\ldots n;\ h=1,2,\ldots 2^n)$$

et examinons un simplexe K_h déterminé par les égalités

$$x_i = \sum_{k=1}^{n} \vartheta_k \alpha^{(h)}_{ik} \quad \text{où} \quad \sum_{k=1}^{n} \vartheta_k \leqq 1 \quad \text{et} \quad \vartheta_k \geqq 0. \qquad (k=1,2,\ldots n)$$

Tous les simplexes $K_h, (h=1,2,\ldots 2^n)$ appartiennent au paralléloèdre R. Un point quelconque (α_i), qui est intérieur à un simplexe K_h, n'appartient à aucun autre simplexe de la série formée. Il en résulte une inégalité

$$(7.)\qquad \sum_h \int_{(K_h)} dx_1\, dx_2 \ldots dx_n < \int_{(R)} dx_1\, dx_2 \ldots dx_n. \qquad (h=1,2,\ldots 2^n)$$

54. En désignant par D le déterminant

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

de la forme quadratique $\Sigma\Sigma a_{ij}x_i x_j$, on aura en vertu de (5.) et (6.),

$$\int_{(K_h)} dx_1\, dx_2 \ldots dx_n = \frac{\omega}{n!} \cdot \frac{D}{2^n},$$

et l'inégalité (7.) donne

$$\frac{\omega}{n!} D < \int_{(R)} dx_1\, dx_2 \ldots dx_n. \tag{8.}$$

Cela posé, observons que le groupe G de vecteurs correspondant au parallélоèdre R possède une base formée de n vecteurs

$$[a_{i1}], [a_{i2}], \ldots [a_{in}].$$

En vertu du théorème III du n° 11, il vient

$$\int_{(R)} dx_1\, dx_2 \ldots dx_n = D. \tag{9.}$$

En substituant dans l'inégalité (8.), on obtient

$$\omega < n!$$

Bemerkung zu *Cremonas* Abhandlung über die Flächen dritter Ordnung.

(Dieses Journal Bd. 68 S. 1—133).

Von Herrn *Rudolf Sturm* in Breslau.

Als ich vor ungefähr 40 Jahren *Cremonas* bekannte Schrift las, stieß ich in dem dritten Kapitel: Assemblages symétriques, welches identisch ist mit dem letzten Kapitel: Complessi simmetrici dei Preliminari ad una teoria geometrica delle superficie*), auf eine mir nicht verständliche Stelle, über welche ich damals nicht zur Aufklärung gelangen konnte. Ich hatte neuerdings Veranlassung, mich wiederum mit diesem Kapitel zu beschäftigen, und bin — es handelt sich vermutlich um dieselbe Sache — nun zur gewünschten Aufklärung gelangt.

Das Ergebnis ist, daß *Cremona* Behauptungen aufgestellt hat, die so allgemein nicht richtig sind, wenn eben bloß die Voraussetzung eines symmetrischen Komplexes gemacht wird. Sie werden aber richtig bei denjenigen symmetrischen Komplexen, welche durch die zweiten Polaren einer Grundfläche gebildet werden, und auf solche kommt es schließlich in *Cremonas* Abhandlung allein an. Aber *Cremona* macht in Kap. 3 nicht diese Einschränkung.**)

Ich versuche im folgenden eine an *Cremona* möglichst sich anschließende andere Darstellung.

I. In Nr. 42 gilt *Cremonas* allgemeine Behauptung. Darin handelt es sich um zwei projektive Flächenbüschel n-ter Ordnung:

---

*) Memorie dell' Accademia di Bologna Ser. II Bd. 6 und 7. — In den Grundzügen einer allgemeinen Theorie der Oberflächen (Berlin 1870), in welchen beide Schriften vereinigt sind, II. Teil, Kap. 9.

**) Ich wiederhole, was ich in meinem Nachruf auf *Cremona* gesagt habe: Gerade eines bedeutenden Mannes Versehen dürfen nicht stehen bleiben. Mein Wunsch ist, *Cremonas* wichtige Abhandlung noch wertvoller zu machen.

$$P_{11}\, P_{12}\, P_{13} \ldots ,$$
$$P_{21}\, P_{22}\, P_{23} \ldots ,$$

welche einen symmetrischen Komplex bilden, d. h. in denen P_{21} identisch mit P_{12} ist. Da ist klar, daß die n^3 gemeinsamen Punkte von P_{11}, P_{12}, P_{13}, weil den Grundkurven der beiden Büschel gemeinsam, Doppelpunkte der erzeugten Fläche von der Ordnung $2n$ sind. Ferner, jede Fläche eines der beiden Büschel schneidet das Erzeugnis in dem Schnitt mit der entsprechenden Fläche und in der Grundkurve des eigenen Büschels. Bei P_{11} und P_{22} vereinigen sich diese Kurven in die Schnittkurve mit P_{12}. Also berühren P_{11} und P_{22} die erzeugte Fläche längs der Kurven, in denen sie von P_{12} geschnitten werden, so daß die beiden Berührungskurven in die Fläche $2n$-ter Ordnung durch P_{12} eingeschnitten werden.

II. In Nr. 43 werden drei kollineare (oder, wie *Cremona* sagt, projektive) Flächennetze n-ter Ordnung vorausgesetzt mit den entsprechenden Flächen:

$$N_1 \qquad P_{11}\, P_{12}\, P_{13}\, P_{14} \ldots ,$$
$$N_2 \qquad P_{21}\, P_{22}\, P_{23}\, P_{24} \ldots ,$$
$$N_3 \qquad P_{31}\, P_{32}\, P_{33}\, P_{34} \ldots ,$$

derartig, daß wiederum ein symmetrischer Komplex entsteht, daß nämlich

$$P_{21} \equiv P_{12},\; P_{31} \equiv P_{13},\; P_{32} \equiv P_{23}.$$

Durch die Büschel (P_{21}, P_{23}), (P_{31}, P_{33}) aus N_2, N_3, welche als entsprechende Büschel kollinearer Netze projektiv sind, entsteht eine Fläche Φ_{12}, welche, wie *Cremona* in einer Anmerkung auseinandersetzt, auch durch eine Projektivität Π zwischen den Büscheln (P_{21}, P_{31}), (P_{23}, P_{33}) oder wegen der obigen Voraussetzung (P_{12}, P_{13}), (P_{32}, P_{33}) aus N_1, N_3 erzeugt werden kann. Aber Π ist nicht die Projektivität, welche diesen Büscheln durch die Kollineation von N_1, N_3 zukommt. Denn durch die Voraussetzung, daß die kollinearen Netze N_1, N_2, N_3 einen symmetrischen Komplex bilden, sind aus N_1 nur P_{12}, P_{13} entsprechend den P_{32}, P_{33} von N_3 gegeben, P_{11}, P_{14} stehen noch ganz frei, und es kann die Kollineation von N_1 zu N_3 so bestimmt werden, daß die von ihr herrührende Projektivität zwischen jenen Büscheln

nicht die Π ist*). Unter Φ_{21} versteht *Cremona* die durch die Kollineations-Projektivität dieser Büschel erzeugte Fläche; also ist, wenn bloß die Voraussetzung des symmetrischen Komplexes gemacht wird, die von *Cremona* behauptete Identität von Φ_{12} und Φ_{21} nicht richtig und ebensowenig sind es die auf diese Identität basierten Schlüsse.

Wir müssen uns auf diejenigen symmetrischen Komplexe beschränken, welche durch reine und gemischte zweite Polaren gebildet werden. Um *Cremonas* Zahlen beizubehalten, nehmen wir diese als n-ter Ordnung, die Grundfläche also von der Ordnung $n+2$ an; im vierten Kapitel ist dann $n+2$ durch n zu ersetzen. In diesem Kapitel findet sich der Beweis der Identität von Φ_{21} mit Φ_{12} für diesen Fall; wir nehmen ihn, ein wenig verändert, nun schon in das dritte Kapitel.

P_1, P_2, P_3 seien die ersten**) Polaren der Punkte $1, 2, 3$, P_{rr} die reine zweite Polare des Punktes r und P_{rs} die gemischte von r und s. Wenn zunächst r ein beliebiger Punkt auf 13 ist, so erzeugen die projektiven Büschel

$$\begin{matrix} P_{21}\ P_{23}\ P_{2r} \ldots \\ P_{31}\ P_{33}\ P_{3r} \end{matrix}$$

der Polaren der Punkte von 13 in bezug auf P_2, P_3 eine Fläche Φ_{12} $2n$-ter Ordnung. Die erzeugende Kurve (P_{2r}, P_{3r}) ist die Schnittkurve der Polaren von r in bezug auf P_2, P_3 oder der Polaren von $2, 3$ in bezug auf P_r, also die Polarkurven der Geraden 23 nach P_r, demnach Φ_{12} der Ort der Polarkurven der Geraden 23 in bezug auf die Polaren der Punkte von 13.

Wenn x ein Punkt von Φ_{12} ist, also auf der Polarkurve von 23 nach P_r gelegen, so geht die letzte oder n-te Polare von x nach P_r durch alle Punkte von 23, also durch 23. Sie ist identisch mit der ersten Polare von r in bezug auf die n-te oder vorletzte Polare von x (nach F^{n+2}), also der Polarebene von r nach dieser Fläche 2. Grades. Wenn aber die Polarebene von r, einem Punkte von 13, durch 23 geht, so sind diese Geraden

*) Man gibt P_{11}, P_{14}, die den P_{31}, P_{34} entsprechen sollen, so, daß die Büschel (P_{11}, P_{14}) und (P_{31}, P_{34}) jene Büschel in Flächen schneiden, welche in Π nicht entsprechend sind.

**) Im folgenden sind immer erste Polaren gemeint, wenn keine Ordinalzahl hinzugefügt ist.

13 und 23 konjugiert in bezug auf diese Fläche. Φ_{12} ist also Ort der Punkte x, in bezug auf deren vorletzte Polaren die Geraden 13, 23 konjugiert sind. Genau zu demselben Ergebnis kommen wir bei Φ_{21}, dem Erzeugnis der projektiven Büschel:

$$P_{12}\, P_{13}\, P_{1r} \ldots$$
$$P_{32}\, P_{33}\, P_{3r} \ldots,$$

(wo nun r auf 23 liegt), also dem Orte der Polarkurven der Geraden 13 in bezug auf die ersten Polaren der Punkte von 23.

Durch diesen Identitätsbeweis von Φ_{21} mit Φ_{12} wird der Beweis in der Anmerkung von Nr. 43 überflüssig.

Diese Fläche $2n$-ter Ordnung $\Phi_{12} \equiv \Phi_{21}$ wird die gemischte zweite Polarfläche der Geraden 13, 23 (in bezug auf F^{n+2}) genannt.

Sie wird von P_{33} in den Kurven (P_{13}, P_{33}), (P_{23}, P_{33}) geschnitten, also in den n^3 allen drei Flächen gemeinsamen Punkten berührt.

Durch die Büschel (P_{22}, P_{23}) und (P_{32}, P_{33}) entsteht die Fläche Φ_{11}, die reine Polarfläche von 23, der Ort der Pole, in bezug auf deren vorletzte Polaren 23 zu sich selbst konjugiert ist, also von ihnen berührt wird. Sie wird (Nr. 42) von P_{22} und P_{33} längs deren Schnittkurven mit P_{23} tangiert.

In derselben Weise entsteht Φ_{22}, die reine Polarfläche von 13, durch die Büschel (P_{11}, P_{13}), (P_{31}, P_{33}) und wird von P_{11} und P_{33} längs der Schnitte mit P_{13} berührt.

In den Punkten (P_{13}, P_{23}, P_{33}) tangieren alle drei Flächen Φ_{11}, Φ_{22}, Φ_{12} die P_{33} und einander.

Jede zwei entsprechenden Büschel aus den Netzen N_2, N_3 führen zu einer Fläche Φ_1 und alle diese Flächen haben (Nr. 22) eine Kurve von der Ordnung $3n^2$ gemeinsam, welche durch Schnittpunkte entsprechender Grundkurven der beiden Netze entsteht. Läßt man die beiden Büschel sich um entsprechende Flächen der Netze drehen, so bekommen die zugehörigen Φ_1 noch die Schnittkurve n^2-ter Ordnung gemeinsam und bilden einen Büschel: woraus sich ergibt, daß man sämtliche Φ_1 aus dreien in der bekannten Entstehungsweise eines Netzes herleiten kann. In ähnlicher Weise führen die Büschel von N_2 und N_3 zu einem Netze von Flächen Φ_2.

III. Aus dem ersteren Netze möge der Büschel (Φ_{11}, Φ_{12}) betrachtet werden*).

Wenn r ein Punkt von 12 ist, so gehört die Fläche Φ_1, welche durch die Büschel:

$$\begin{matrix} P_{2r} & P_{23}, \\ P_{3r} & P_{33} \end{matrix}$$

erzeugt wird, zu jenem Büschel; (P_{23}, P_{33}) ist die Restkurve n^2-ter Ordnung. Sie ist die gemischte Polarfläche der Geraden 23 und r3.

Ebenso haben wir im anderen Netze den Büschel (Φ_{21}, Φ_{22}), bestehend aus den gemischten Polarflächen der Geraden 13 und r3, die je durch $P_{1r} P_{13}$, $P_{3r} P_{33}$ erzeugt werden. Indem wir die zu derselben Geraden r3 gehörigen Polarflächen einander zuordnen, machen wir die beiden Büschel zueinander projektiv; sie erzeugen eine Fläche von der Ordnung $4n$. Die Schnittkurve zweier entsprechenden Flächen Φ aus diesen Büscheln zerfällt in die Grundkurve (P_{3r}, P_{33}) des Büschels aus N_3 und eine Kurve von der Ordnung $3n^2$, das Erzeugnis der drei projektiven Büschel (P_{1r}, P_{13}), (P_{2r}, P_{23}), (P_{3r}, P_{33}).

Und die Fläche $4n$-ter Ordnung zerfällt in die Fläche P_{33}, die durch den erst genannten Teil entsteht, und eine Fläche Ψ von der Ordnung $3n$, welche durch die Kurve $3n^2$-ter Ordnung erzeugt wird. Drei entsprechende Flächen der Büschel, welche die zur Geraden r3 gehörige Kurve dieser Ordnung erzeugen, sind, wenn s ein Punkt von r3 ist, die Polaren P_{1s}, P_{2s}, P_{3s}; dadurch wird Ψ der Ort der Schnittpunkte der Polaren von 1, 2, 3 und damit aller Punkte von 123 in bezug auf die Polare des beliebigen Punktes s der Ebene 123, oder der Pole der Ebene 123 in bezug auf die Polaren der Punkte s dieser Ebene, also der Ort der Punkte x, für welche 123 Polarebene ist in bezug auf die Polare eines Punktes s dieser Ebene. Die Polarebene oder n-te Polare von x in bezug auf die erste Polare von s ist die erste Polare oder Polarebene des s in bezug auf die n-te oder vorletzte Polare von x; und weil sie durch den Pol geht, so berührt sie diese vorletzte Polare. Demnach ist Ψ der Ort der Punkte,

*) Hier kann man, weil es sich eben nur um Polaren handelt, *Cremonas* Betrachtung etwas vereinfachen und anschaulicher machen.

deren vorletzte Polare die Ebene 123 tangiert: die reine Polarfläche dieser Ebene.

Nunmehr haben wir sie nur auf die Ebene bezogen und von der engeren Beziehung auf die drei Punkte 1, 2, 3 freigemacht.

Wenn s je die Gerade $3r$ durchläuft, erzeugen die Schnittpunkte (P_1, P_2, P_3) die Kurve von der Ordnung $3n^2$ und, wenn dann r die 12 durchläuft, erzeugt diese Kurve die Fläche Ψ; damit wird sie Ort jener Schnittpunkte für alle Punkte s von 123 oder Ort der Schnittpunkte entsprechender Flächen aus den drei kollinearen Netzen N_1, N_2, N_3, die ja eine Fläche von der Ordnung $3n$ erzeugen (Nr. 23).

Indem wir $P_{33}\,\Psi$ andererseits durch die einen symmetrischen Komplex bildenden projektiven Büschel

$$\begin{matrix} \Phi_{11}, & \Phi_{12}, \\ \Phi_{21}, & \Phi_{22} \end{matrix}$$

erzeugen, erkennen wir (Nr. 42), daß dies Erzeugnis von Φ_{11} längs des Schnittes mit Φ_{21} tangiert wird, und zwar der Bestandteil P_{33} längs der Kurve (P_{23}, P_{33}) und der Bestandteil Ψ längs einer Kurve $3n^2$-Ordnung, dem Erzeugnis der drei projektiven Büschel (P_{12}, P_{13}), (P_{22}, P_{23}), (P_{32}, P_{33}), wie aus der eben erwähnten Erzeugung von Ψ durch kollineare Netze und aus denen von Φ_{11} und Φ_{21} sich ergibt. Und ähnliches gilt für Φ_{22}.

Ferner, die $8n^3$ gemeinsamen Punkte von Φ_{11}, Φ_{22}, Φ_{12} müssen zu Doppelpunkten des Erzeugnisses $P_{33}\,\Psi$ führen. Zu ihnen gehören die n_3 Schnittpunkte von P_{13}, P_{23}, P_{33}, in denen die drei Flächen Φ einander berühren, was $4n^3$ Schnittpunkte absorbiert. Denn die Schnittkurve zweier hat in einem solchen Berührungspunkte einen Doppelpunkt und berührt in ihm mit beiden Ästen die dritte. Sie liegen auf P_{33} und auf Ψ, letzteres, weil sie Schnittpunkte entsprechender Flächen aus den die Ψ erzeugenden kollinearen Netzen N_1, N_2, N_3 sind; auf diese Weise werden sie Doppelpunkte P von $P_{33}\,\Psi$.

Die $8n^3 - 4n^3 = 4n^3$ übrigen gemeinsamen Punkte der Φ sind Doppelpunkte von Ψ allein.

Die reine Polarfläche einer Ebene, von der Ordnung $3n$, hat $4n^3$ Doppelpunkte.

Nachdem wir aber diese Fläche von der Beziehung zu den Punkten 1, 2, 3 befreit haben, erkennen wir:

Sie wird von der reinen Polarfläche jeder Geraden der Ebene, zu welcher sie gehört, längs einer Kurve $3n^2$-ter Ordnung berührt. Und die beiden zu zwei Geraden der Ebene gehörigen Berührungskurven werden durch die gemischte Polarfläche der beiden Geraden eingeschnitten. Alle diese reinen und gemischten Polarflächen und zugehörigen Berührungs- oder Schnittkurven gehen durch die $4n^3$ Doppelpunkte, welche die Fläche besitzt.

IV. In Nr. 46 geht *Cremona* über zu vier kollinearen Gebüschen (systèmes linéaires) von Flächen n-ter Ordnung:

$$\begin{array}{ll} G_1 & P_{11}\, P_{12}\, P_{13}\, P_{14}\, P_{15} \ldots\,, \\ G_2 & P_{21}\, P_{22}\, P_{23}\, P_{24}\, P_{25} \ldots\,, \\ G_3 & P_{31}\, P_{32}\, P_{33}\, P_{34}\, P_{35} \ldots\,, \\ G_4 & P_{41}\, P_{42}\, P_{43}\, P_{44}\, P_{45} \ldots\,, \end{array}$$

welche einen symmetrischen Komplex bilden, bei denen also:

$$P_{21} \equiv P_{12},\; P_{31} \equiv P_{13}, \ldots P_{43} \equiv P_{34}.$$

Die drei kollinearen Netze

$$N_2 = (P_{22}, P_{23}, P_{24}),\; N_3 = (P_{32}, P_{33}, P_{34}),\; N_4 = (P_{42}, P_{43}, P_{44})$$

aus G_2, G_3, G_4 erzeugen wohl eine Fläche Ψ_{11} von der Ordnung $3n$. Aber aus der bloßen Voraussetzung des symmetrischen Komplexes läßt sich, wie im vorangehenden erkannt wurde, nicht schließen, daß sie von der durch die projektiven Büschel (P_{33}, P_{34}), (P_{43}, P_{44}) erzeugten Fläche Φ längs einer Kurve von der Ordnung $3n^2$ berührt wird.

Ferner, die Fläche Ψ_{12}, welche durch die drei kollinearen Netze (P_{21}, P_{23}, P_{24}), (P_{31}, P_{33}, P_{34}), (P_{41}, P_{43}, P_{44}) aus G_2, G_3, G_4 entstehe, kann wohl, wie in Nr. 45 erörtert wird, auch durch eine Kollineation zwischen den Netzen (P_{12}, P_{13}, P_{14}), (P_{32}, P_{33}, P_{34}), (P_{42}, P_{43}, P_{44}) aus G_1, G_2, G_4 erzeugt werden, aber das ist nicht die Kollineation, welche diesen Netzen durch die Kollineation der Gebüsche zukommt; also ist Ψ_{12} nicht mit der aus dieser Kollineation hervorgehenden Fläche Ψ_{21} identisch. U. s. w.

Handelt es sich aber wiederum um zweite Polaren in bezug auf F^{n+2}, so ist Ψ_{11} die reine Polarfläche der Ebene 234, und sie wird von der Fläche Φ, der reinen Polarfläche der Geraden 34, längs der Kurve von der Ordnung $3n^2$ berührt, die durch die projektiven Büschel (P_{23}, P_{24}), (P_{33}, P_{34}), (P_{43}, P_{44}) erzeugt wird und auf der gemischten zweiten Polarfläche von 24, 34 liegt.

Analog entsteht die reine Polarfläche Ψ_{22} der Ebene 134 und wird von derselben Φ längs der durch (P_{13}, P_{14}), (P_{33}, P_{34}), (P_{43}, P_{44}) erzeugten Kurve berührt.

Wir nennen nun Ψ_{12} das Erzeugnis der kollinearen Netze:

$$\begin{aligned} &P_{21}\, P_{23}\, P_{24} \ldots, \\ &P_{31}\, P_{33}\, P_{34} \ldots, \\ &P_{41}\, P_{43}\, P_{44} \ldots \end{aligned}$$

der Polaren der Punkte von 134 in bezug auf P_2, P_3, P_4.

Ist s ein Punkt von 134, so sind in diesen kollinearen Netzen seine Polaren nach P_2, P_3, P_4 entsprechend, die wir auch die Polaren von 2, 3, 4 nach P_s nennen können. Ein beliebiger Punkt x von Ψ_{12} ist Schnitt dreier solcher Polaren, 234 also die Polarebene oder n-te Polare des x in bezug auf P_s oder die erste Polare oder Polarebene von s in bezug auf die n-te oder vorletzte Polare von x. Da also der Pol s in 134 liegt, so werden 134 und 234 in bezug auf diese Fläche 2. Grades konjugiert; und Ψ_{12} ist Ort solcher Punkte x, in bezug auf deren vorletzte Polaren die genannten Ebenen konjugiert sind. Genau zu demselben Ergebnis gelangt man bei Ψ_{21}, dem Erzeugnisse der kollinearen Netze $(P_{12}, P_{13}, P_{14}), \ldots$ aus G_1, G_3, G_4. Damit ist die Identität von Ψ_{12} und Ψ_{21} erkannt, und die Erörterung von Nr. 45 sowie auch die in Nr. 44 wird überflüssig. Diese Fläche heißt die gemischte Polarfläche der Ebenen 134 und 234.

Die beiden Erzeugungen dieser Fläche, als Ψ_{12} und Ψ_{21}, zeigen, daß die Kurven $3n^2$-ter Ordnung, längs deren Ψ_{11} und Ψ_{22} von Φ berührt werden, auf Ψ_{12} liegen; sie bilden den vollen Schnitt von Φ und Ψ_{12}. Die Berührungskurve von Φ mit Ψ_{11} entsteht durch die projektiven Büschel $B_2 = (P_{23}, P_{24})$, $B_3 = (P_{33}, P_{34})$, $B_4 = (P_{43}, P_{44})$ und diejenige mit Ψ_{22} durch die Büschel $B_1 = (P_{13}, P_{14})$, B_3, B_4. Die beiden Kurven haben gemeinsam die $4n^3$ Punkte, in denen entsprechende Flächen von allen vier projektiven Büscheln B_1, B_2, B_3, B_4 zusammen kommen (Nr. 19). In diesen $4n^3$ Punkten berühren daher die drei Flächen $\Psi_{11}, \Psi_{22}, \Psi_{12}$ die Φ und einander.

V. Betrachten wir die erste der beiden Berührungskurven noch etwas genauer. Wenn t ein Punkt von 34 ist, so sind P_{2t}, P_{3t}, P_{4t} entsprechende Flächen aus den erzeugenden Büscheln B_2, B_3, B_4; ist x ein gemeinsamer Punkt dieser Flächen, also ein Punkt der Kurve, so folgt wieder, daß t der Pol der Ebene 234 in bezug auf die vorletzte Polare von x ist. Die Kurve ist der Ort der Punkte, in bezug auf deren vorletzte Polaren die Ebene 234 ihren Pol auf 34 hat. Für einen gemeinsamen Punkt von Ψ_{11} und Ψ_{21} gilt nun, daß in bezug auf seine vorletzte Polare die Ebene 234 einen Pol in 234 und einen in 134 hat. Sind diese Pole identisch, so handelt es sich um einen Punkt von 34, und der gemeinsame Punkt liegt auf unserer Kurve. Sind sie nicht identisch, so gehört er dem Restschnitt von der Ordnung $6n^2$ an, und die vorletzte Polare ist ein Kegel, der seine Spitze in 234 hat, so daß diese ∞^1 eine Gerade erfüllende Pole hat. In jede Ebene durch 34 fällt also einer, und beide Kurven liegen auf den gemischten Polarflächen, die zu der festen Ebene 234 und einer veränderlichen Ebene durch 34 gehören. Diese Polarflächen bilden einen Büschel, der zu dem Büschel der veränderlichen Ebenen projektiv ist. Ist $r34$ eine dieser Ebenen und r ihr Punkt auf 12, so wird die gemischte Polarfläche von 234 und $r34$ durch die Netze (P_{2r}, P_{23}, P_{24}), (P_{3r}, P_{33}, P_{34}), (P_{4r}, P_{43}, P_{44}) erzeugt. Zu diesem Büschel gehören Ψ_{11}, Ψ_{12}.

Ebenso haben wir den Büschel (Ψ_{21}, Ψ_{22}) der gemischten Polarflächen, die zu 134 und je einer $r34$ gehören. Erzeugende Netze sind (P_{1r}, P_{13}, P_{14}) und die beiden letzten von vorhin. Die zu derselben Ebene $r34$ gehörigen Ψ_{1r}, Ψ_{2r} haben die Kurve von der Ordnung $3n^2$ gemein, längs deren die reine Polarfläche von $r34$ von der Fläche Φ berührt wird. Sie entsteht durch die projektiven Büschel (P_{r3}, P_{r4}), (P_{33}, P_{34}), (P_{43}, P_{44}). Wir wollen diese Kurve noch auf eine andere Weise entstehen lassen. Es liege t wieder auf 34, so sind P_{rt}, P_{3t}, P_{4t} entsprechende Flächen aus jenen Büscheln. Ein Schnittpunkt x von ihnen, also ein Punkt der Kurve, ist Schnittpunkt der Polaren von $r, 3, 4$ in bezug auf P_t, mithin Grundpunkt des Netzes der Polaren aller Punkte von $r34$ nach P_t; folglich gehen die Polarkurven aller Geraden dieser Ebene nach P_t durch ihn. Von den Polarkurven der nämlichen Geraden in bezug auf P_3, welche auch die Grundkurven eines Netzes sind, geht eine durch ihn; weil nun die Polarkurven der zugehörigen Geraden in $r34$ in bezug auf P_3 und P_t beide durch ihn gehen, so tut es, da P_4 zum Büschel $P_3 P_t$ gehört, auch die in bezug auf

P_4. Der Punkt x ist demnach Schnittpunkt entsprechender Grundkurven der Netze der Polaren der Punkte von $r\,34$ in bezug auf P_3 und P_4, also ist die Kurve das Erzeugnis der beiden kollinearen Netze:

$$P_{3r}\,P_{33}\,P_{34},$$
$$P_{4r}\,P_{43}\,P_{44},$$

welches Erzeugnis ja von der Ordnung $3\,n^2$ ist (Nr. 23.).

Außer dieser Kurve haben Ψ_{1r}, Ψ_{2r} noch eine Kurve von der Ordnung $6\,n^2$ gemein. Ist x ein Punkt derselben, so gehen durch ihn, weil er auf Ψ_{1r} liegt, drei entsprechende Flächen aus $N_2=(P_{2r},\,P_{23},\,P_{24})$, $N_3=(P_{3r},\,P_{33},\,P_{34})$, $N_4=(P_{4r},\,P_{43},\,P_{44})$ und, weil er auf Ψ_{2r} liegt, drei entsprechende Flächen aus $N_1=(P_{1r},\,P_{13},\,P_{14}),\,N_3,\,N_4$. Handelte es sich um verschiedene entsprechende Flächen aus N_3, N_4, so würden, da dies die obigen zu $r\,34$ gehörigen Polarennetze in bezug auf $P_3,\,P_4$ sind, in x sich zwei entsprechende Grundkurven aus diesen Netzen schneiden, was nur für die Punkte des anderen Schnittbestandteils gilt. Folglich sind es beidemal die nämlichen entsprechenden Flächen aus $N_3,\,N_4$, und der Punkt x ist gemeinsam vier entsprechenden Flächen aus $N_1,\,N_2,\,N_3,\,N_4$.

Bewegt sich $r34$, so werden die Büschel $3\,n$-ter Ordnung der Ψ_{1r} und Ψ_{2r} projektiv und erzeugen eine Fläche von der Ordnung $6\,n$; von den beiden Schnittbestandteilen entsprechender Flächen, $3\,n^2$-ter und $6\,n^2$-ter Ordnung, erzeugt der erstere die Fläche Φ, die reine Polarfläche von 34, welche $2\,n$-ter Ordnung ist, der andere also eine Fläche $\varDelta$ $4\,n$-ter Ordnung. Die vier Netze erzeugen dann die 4 Gebüsche $G_1,\,G_2,\,G_3,\,G_4$, und $\varDelta$ ist der Ort der Punkte, in denen vier entsprechende Flächen aus diesen sich schneiden; welcher Ort nach Nr. 36 von der Ordnung $4\,n$ sein muß.

VI. Weil nun wiederum die beiden Büschel $(\Psi_{11},\,\Psi_{12})$ und $(\Psi_{21},\,\Psi_{22})$ einen symmetrischen Komplex bilden, so müssen die Schnittpunkte dieser drei Flächen $\Psi_{11},\,\Psi_{22},\,\Psi_{12}$ für die erzeugte Fläche $\Phi\varDelta$ Doppelpunkte liefern. Sie haben, wie in IV gefunden, $4\,n^3$ Berührungspunkte, welche wie oben für $4\cdot 4\,n^3$ Schnittpunkte zählen. Diese liegen auf Φ, denn die drei Flächen Ψ berühren in ihnen einander und Φ, aber auch auf $\varDelta$, als gemeinsame Punkte entsprechender Flächen aus den Büscheln $B_1,\,B_2,\,B_3,\,B_4$, welche in den $\varDelta$ erzeugenden kollinearen Gebüschen $G_1,\,G_2,\,G_3,\,G_4$ entsprechend sind. Auf diese Weise werden sie Doppelpunkte von $\Psi\varDelta$. Es

bleiben $(3n)^3 - 16n^3 = 11n^3$ Schnittpunkte, von denen n^3 auf Φ und $10n^3$ auf Δ doppelt sind.

Diese Fläche Δ von der Ordnung $4n$ hat also $10n^3$ Doppelpunkte, welche auf allen reinen und gemischten Polarflächen von Ebenen liegen.

Aus der Erzeugung durch jene Büschel, die einen symmetrischen Komplex bilden, folgt ferner, daß Δ von jeder reinen Polarfläche einer Ebene längs einer Kurve von der Ordnung $6n^2$ berührt wird und die von zwei Ebenen herrührenden Berührungskurven auf der gemischten Polarfläche der beiden Ebenen liegen.

Nun folgt das vierte Kapitel von *Cremona*, in dem einige Partien, weil schon im neuen dritten enthalten, zu streichen sind.

Über Labilität eines materiellen Punktes im widerstrebenden Mittel.

Von Herrn *Moritz Réthy in Budapest.*

I. Im Anschluß an meine frühere Mitteilung*) gehe ich auf die Untersuchung des Gleichgewichts eines materiellen Punktes über, wenn das Mittel auf den in ihm bewegten Punkt außer dem tangentiellen Widerstand auch einen solchen in Richtung der Hauptnormale ausübt.**)

Bezeichnet man die kartesischen Koordinaten des Punktes (von der Masse = 1) mit x, y, z, die Geschwindigkeit mit v, das Potential der freien Kraft mit U, die tangentielle Widerstandskraft mit $f(v)$, so sind die Bewegungsgleichungen des materiellen Punktes

$$(1.)\qquad \begin{aligned} x'' &= \frac{\partial U}{\partial x} - f(v)\frac{x'}{v} - \lambda v \frac{d}{dt}\frac{x'}{v}, \\ y'' &= \frac{\partial U}{\partial y} - f(v)\frac{y'}{v} - \lambda v \frac{d}{dt}\frac{y'}{v}, \\ z'' &= \frac{\partial U}{\partial z} - f(v)\frac{z'}{v} - \lambda v \frac{d}{dt}\frac{z'}{v}, \end{aligned}$$

wo λ einstweilen eine beliebig veränderliche endliche Größe bedeute.

Ich führe die Bezeichnungen ein

$$(2.)\qquad \begin{aligned} p_i &\equiv \alpha x'' + \beta y'' + \gamma z'', \\ v_i &\equiv \alpha x' + \beta y' + \gamma z', \\ P_i &\equiv \alpha \frac{\partial U}{\partial x} + \beta \frac{\partial U}{\partial y} + \gamma \frac{\partial U}{\partial z}. \end{aligned}$$

*) Über Stabilität und Labilität etc., dieses Journ. Bd. 133, S. 284 ff.

**) Ich fasse hier das in ungarischer Sprache in „Mathematikai és Physikai Lapok" Bd. XVI, S. 261—272 und S. 365—372 Publizierte im Auszuge zusammen.

Schreibt man die Gleichungen (1.) in der Form

$$(1+\lambda)x'' = \frac{\partial U}{\partial x} + \lambda \frac{dv}{dt}\frac{x'}{v} - f(v)\frac{x'}{v},$$

so folgt mittels Komposition dieser Gleichungen

$$(3.) \qquad (1+\lambda)p_i = P_i + \lambda \frac{dv}{dt}\frac{v_i}{v} - f(v)\frac{v_i}{v}.$$

Nun sei erstens

a) $\alpha = x', \qquad \beta = y', \qquad \gamma = z';$

zweitens sei, wenn mit n die vom materiellen Punkt gegen den Krümmungsmittelpunkt der Bahn gerichtete Gerade bezeichnet wird,

b) $\alpha = \cos(n, x), \quad \beta = \cos(n, y), \quad \gamma = \cos(n, z);$

drittens sei

c) $\alpha = x, \qquad \beta = y, \qquad \gamma = z;$

schließlich sei

d) $\alpha = \frac{\partial U}{\partial x}, \qquad \beta = \frac{\partial U}{\partial y}, \qquad \gamma = \frac{\partial U}{\partial z}.$

Wir haben im ersten Fall

a) $p_i \equiv v\frac{dv}{dt}, \quad v_i \equiv v^2, \quad P_i \equiv \frac{dU}{dt};$

im zweiten Fall

b) $p_i \equiv \frac{v^2}{\varrho}, \quad v_i \equiv 0, \quad P_i \equiv P_n,$

wo ϱ den Krümmungsradius und P_n die Komponente der freien Kraft in Richtung des Krümmungsradius bezeichnen; im dritten Fall haben wir (bei der Bezeichnung $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$)

c) $v_i \equiv rr', \quad p_i \equiv rr'' + r'^2 - v^2, \quad P_i \equiv r\frac{\partial U}{\partial r};$

im vierten Fall haben wir schließlich

d) $v_i \equiv \frac{dU}{dt} \equiv U', \quad P_i \equiv \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2 = P^2,$

wo P die freie Kraft in x, y, z bedeutet; und wir haben

$$p_i \equiv \frac{d^2 U}{d t^2} - V \equiv U'' - V,$$

wo V durch die Gleichung definiert ist

$$(4.) \quad V \equiv \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} x'^2 + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} y'^2 + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} z'^2 + 2 \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} y' z' + 2 \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial x} z' x' + 2 \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} x' y'.$$

Aus der Gleichung (3.) entspringen daher den Fällen a), b), c), d) gemäß die Gleichungen

$$(4^{\mathrm{I}}.) \qquad v \frac{dv}{dt} = \frac{dU}{dt} - v f(v),$$

$$(4^{\mathrm{II}}.) \qquad (1+\lambda) \frac{v^2}{\varrho} = P_n,$$

$$(4^{\mathrm{III}}.) \qquad (1+\lambda) r'' = \frac{\partial U}{\partial r} + \lambda \frac{dv}{dt} \frac{r'}{v} - f(v) \frac{r'}{v} + \frac{1+\lambda}{r} (v^2 - r'^2),$$

$$(4^{\mathrm{IV}}.) \qquad (1+\lambda) U'' = P^2 + \lambda \frac{dv}{dt} \frac{U'}{v} - f(v) \frac{U'}{v} + (1+\lambda) V.$$

II. Man sieht aus (4^{I}.), daß auf die Veränderung der lebendigen Kraft außer der Potentialkraft bloß die Widerstandskraft $f(v)$ von Einfluß ist; auch dies zeigt, daß $f(v)$ die Tangentialkomponente des totalen Widerstandes ist.

Die Gleichung (4^{II}.) zeigt, daß die zentripetale Komponente der Beschleunigung nur dann gleich ist der Komponente der freien Kraft in Richtung von n, wenn $\lambda = 0$ ist, während sonst

$$\frac{v^2}{\varrho} = \frac{P_n}{1+\lambda}$$

stattfindet. Demnach bedeutet $\lambda \frac{v^2}{\varrho}$ die Widerstandskomponente in Richtung und im Sinn von n, und diese Komponente nimmt bei endlichem P_n nur dann unendlich ab, wenn λ unendlich abnimmt. Ich nenne den Faktor λ den *Wirkungskoeffizienten* der normalen Widerstandskomponente.

Die Gleichung (4^{III}.) transformiere ich mittels (4^{I}.), indem ich $\frac{dv}{dt}$ eliminiere, und habe an ihrer Stelle

$$(5.) \qquad r'' = \frac{1}{1+\lambda} \left(\frac{\partial U}{\partial r} + \lambda \frac{r' U'}{v^2} \right) - f(v) \frac{r'}{v} + \frac{1}{r} (v^2 - r'^2).$$

Ich führe nun bezüglich U die Voraussetzung ein, daß es im Punkte G, wo $r=0$, ein Minimum besitze, und daß diese Eigenschaft aus seiner *Taylor*schen Entwicklung erkennbar sei; bezüglich des Wirkungskoeffizienten λ will ich ferner die Voraussetzung einführen, daß sein absoluter Wert bei abnehmender Geschwindigkeit unterhalb einer durch U angebbaren Größe <1 sinkt. Es läßt sich dann beweisen, daß das erste Glied zur Rechten von (5.), nämlich

$$A \equiv \left(\frac{\partial U}{\partial r} + \lambda \frac{r' U'}{v^2}\right)\frac{1}{1+\lambda} \tag{5'.}$$

innerhalb eines um G herum abgrenzbaren Gebietes T eine nicht negative Größe ist.

Ich unterscheide, um dies zu beweisen, drei Fälle:

1. Es sei

$$U = F(r).$$

Dann ist

$$A \equiv \left(1 + \lambda \frac{r'^2}{v^2}\right)\frac{1}{1+\lambda}\frac{\partial U}{\partial r},$$

daher ist das Gebiet T nur so abzugrenzen, daß $\frac{\partial U}{\partial r}$ in ihm nirgends negativ ist, was bei der vorausgesetzten Minimumeigenschaft von U immer möglich ist, und daß in ihm $|\lambda|<1$ bleibt. Ist die Anfangsgeschwindigkeit genügend klein, so folgt die Erfüllbarkeit der letzteren Bedingung aus der bezüglich λ gemachten Voraussetzung.

2. Bezeichnen r, ϑ, ω die Polarkoordinaten des materiellen Punktes, so sei

$$U = F(r, \vartheta).$$

Ich setze, mit ε und η positive Größen bezeichnend,

$$1 = \varepsilon + \eta$$

$$(1+\lambda) A \equiv \varepsilon \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{v^2} A_1, \tag{5''.}$$

wo

$$A_1 \equiv \eta v^2 \frac{\partial U}{\partial r} + \lambda r' \left(\frac{\partial U}{\partial r} r' + \frac{\partial U}{\partial \vartheta} \vartheta'\right)$$

$$\equiv (\eta v^2 + \lambda r'^2)\frac{\partial U}{\partial r} + \lambda r' \vartheta' \frac{\partial U}{\partial \vartheta},$$

d. i.

$$A_1 \equiv (\eta + \lambda)\frac{\partial U}{\partial r} r'^2 + \lambda \frac{\partial U}{\partial \vartheta} r' \vartheta' + \eta \frac{\partial U}{\partial r} r^2 \vartheta'^2 + \eta \frac{\partial U}{\partial r} r^2 \sin^2\vartheta\, \omega'^2. \tag{6.}$$

Da A_1 in r', ϑ', ω' eine quadratische Form ist, so steht demnach fest, daß

$$(1+\lambda)A \geqq \varepsilon \frac{\partial U}{\partial r},$$

also A eine nicht negative Größe ist, sobald das Gebiet T auf die Weise abgegrenzt wird, daß in ihm keine der drei Größen

$$\frac{\partial U}{\partial r},\ \ \eta+\lambda,\ \ 4\eta(\eta+\lambda)r^2\left(\frac{\partial U}{\partial r}\right)^2 - \lambda^2\left(\frac{\partial U}{\partial \vartheta}\right)^2$$

negativ werden kann. Nur das Nichtnegativwerden der dritten Größe ist zu untersuchen, da es fraglich ist, ob durch die Forderung bezüglich des Wirkungskoeffizienten λ nicht Unerfüllbares vorgeschrieben würde, wenn λ etwa eine Funktion bloß der Geschwindigkeit v sein sollte.

Da bei der vorliegenden Frage das niedrigste Glied der *Taylor*schen Reihe des Potentials, das mit U_{2n} bezeichnet werde, entscheidend ist, so ist demnach nur die Forderung

$$4\eta(\eta+\lambda)r^2\left(\frac{\partial U_{2n}}{\partial r}\right)^2 - \lambda^2\left(\frac{\partial U_{2n}}{\partial \vartheta}\right)^2 \geqq 0 \tag{7.}$$

zu untersuchen. Da

$$U_{2n} \equiv r^{2n} f_1(\vartheta),$$

wo $f_1(\vartheta)$ eine ganze Funktion von $\sin\vartheta$ und $\cos\vartheta$ ist, so hat man

$$\left(\frac{\frac{\partial U_{2n}}{\partial \vartheta}}{r\frac{\partial U}{\partial r}}\right)^2 \equiv \left(\frac{f_1'(\vartheta)}{2n f_1(\vartheta)}\right)^2. \tag{8.}$$

Da U_{2n} nur für $r=0$ verschwindet und nirgends negativ ist, so ist $f_1(\vartheta)$ gewiß positiv. Da außerdem $f_1'(\vartheta)$ ebenfalls eine ganze Funktion von $\sin\vartheta$ und $\cos\vartheta$ ist und als solche nicht unendlich groß werden kann, so hat die durch (8.) definierte Größe $\left(\frac{\partial U_{2n}}{\partial \vartheta} : r\frac{\partial U}{\partial r}\right)^2$ eine obere Grenze, die mit $\frac{2}{M}$ bezeichnet werden möge.

Nun treffe ich bezüglich λ die Festsetzung

$$2\eta(\eta+\lambda)M - \lambda^2 = 0. \tag{7'.}$$

Dann ist der Forderung (7.) gewiß Genüge geleistet. Demnach haben wir

$$\frac{\lambda}{\eta} = M \pm \sqrt{M^2 + 2M},$$

also haben wir, im Falle λ positiv ist, bezüglich λ die Forderung zu erfüllen, daß es kleiner ist als

$$M + \sqrt{M^2 + 2M},$$

und im Fall λ negativ ist, daß der absolute Wert von λ kleiner ist als

$$\sqrt{M^2 + 2M} - M < 1.$$

Ich habe demnach das Gebiet T so eng zu begrenzen, daß in ihm die Geschwindigkeitszunahme $\varDelta v$ selbst im Falle eines nicht widerstehenden Mittels so klein ausfällt, daß die zur Geschwindigkeit $\varDelta v$ gehörige Größe von λ kleiner ist als der soeben festgesetzte erlaubte Wert des Wirkungskoeffizienten. Ist das der Fall, so darf ich dem materiellen Punkt nur eine so kleine Anfangsgeschwindigkeit v_0 erteilen, daß auch der zu $v_0 + \varDelta v$ gehörige Wert von λ den festgesetzten erlaubten Wert des Wirkungskoeffizienten nicht überschreitet.

3. Ich gehe zum dritten, dem allgemeinsten Fall über

$$U = F(r, \vartheta, \omega),$$

wo an Stelle von (5″.) die Identität tritt

$$(5'''.) \qquad (1+\lambda) A \equiv \epsilon \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{v^2} B,$$

$$B \equiv A_1 + \lambda \frac{\partial U}{\partial \omega} r' \omega'.$$

Die Größe B ist gewiß nicht negativ, wenn die Determinante

$$\begin{vmatrix} 2(\eta+\lambda)\dfrac{\partial U_{2n}}{\partial r} & \lambda \dfrac{\partial U_{2n}}{\partial \vartheta} & \lambda \dfrac{\partial U_{2n}}{\partial \omega} \\ \lambda \dfrac{\partial U_{2n}}{\partial \vartheta} & 2\eta \dfrac{\partial U_{2n}}{\partial r} & 0 \\ \lambda \dfrac{\partial U_{2n}}{\partial \omega} & 0 & 2\eta \dfrac{\partial U_{2n}}{\partial r} r^2 \sin^2\vartheta \end{vmatrix}$$

wie auch die Hauptminoren der Determinante positiv sind, also wenn außer den beiden Größen

$$\frac{\partial U_{2n}}{\partial r}, \qquad \eta + \lambda$$

auch noch

$$2(\eta + \lambda)\eta M - \lambda^2$$

nicht negativ ist, wo M im allgemeinen nicht dasselbe bezeichnet, wie in (7′.), sondern den im Wertvorrat der Größen

$$\frac{2r^2\left(\frac{\partial U_{2n}}{\partial \vartheta}\right)^2}{\left(\frac{\partial U_{2n}}{\partial \vartheta}\right)^2}, \qquad \frac{2r^2\left(\frac{\partial U_{2n}}{\partial r}\right)^2 \sin^2\vartheta}{\left(\frac{\partial U_{2n}}{\partial \omega}\right)^2}, \qquad \frac{2r^2\left(\frac{\partial U_{2n}}{\partial r}\right)^2 \sin^2\vartheta}{\left(\frac{\partial U_{2n}}{\partial \omega}\right)^2 + \left(\frac{\partial U_{2n}}{\partial \vartheta}\right)^2 \sin^2\vartheta}$$

befindlichen kleinsten Wert, resp. die untere Grenze dieser Werte; daß eine solche existiert, davon überzeugt man sich wie früher.

Da die Forderungen demnach dieselben sind wie im Fall (2.), so ist das Gebiet T auch jetzt ebenso abzugrenzen wie im genannten Fall.

III. Bezeichne ich die Summe der ersten und der letzten Glieder zur Rechten der Gleichung (5.) mit K und schreibe diese in der Form

$$r'' = K - f(v)\frac{r'}{v}, \tag{9.}$$

so ist demnach die Größe K gewiß nicht negativ und verschwindet höchstens im Punkte $r = 0$. Daher fließen aus dieser Gleichung (9.) dieselben Konsequenzen, wie aus der Gleichung (2.) meiner oben zitierten Note. Ich kann daher die folgende Verallgemeinerung des Satzes des Herrn *Fejér* aussprechen:

Hat das Potential U im Punkte G ein aus dem Glied U_{2n} der Taylorschen Entwickelung erkennbares isoliertes Minimum, wo n beliebig ist, so befindet sich der materielle Punkt in G in labilem Gleichgewicht, wenn nur der Wirkungskoeffizient der normalen Hauptkomponente des Widerstandes bei genügend abnehmender Geschwindigkeit kleiner wird als eine (im allgemeinen durch die Konstanten des Potentials) bestimmte Größe, während der bei $v = 0$ verschwindenden tangentiellen Komponente $f(v)$ die Eigenschaft zukommt, daß $\frac{f(v)}{v}$ bei abnehmendem und genügend kleinem v entweder kleiner bleibt als eine gewisse endliche Größe, oder monoton zunimmt.

IV. Die Betrachtung der Gleichung (4^{IV}.) führt zu teilweise anderen genügenden Bedingungen des labilen Gleichgewichts.

Man findet mittels (4^{I}.) die Gleichung

$$\frac{dv}{dt}\frac{U'}{v} = \left(\frac{U'}{v}\right)^2 - f(v)\frac{U'}{v},$$

also infolge

$$\frac{U'}{v} = \frac{\partial U}{\partial x}\frac{x'}{v} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{y'}{v} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{z'}{r} = P\cos(P,v)$$

die Gleichung

$$\frac{dv}{dt}\frac{U'}{v} = P^2\cos^2(P,v) - f(v)\frac{U'}{v};$$

daher kann man die Gleichung (4^{IV}.) so schreiben:

$$(10.)\qquad U'' = P^2\cos^2(P,v) + \frac{P^2\sin^2 P(v)}{1+\lambda} + V - f(v)\frac{U'}{v}.$$

Sind die *Hesse*sche Determinante von U und ihre Hauptminoren in der Umgebung von $r=0$ sämtlich positive Formen, so ist V eine positive quadratische Form von x', y', z'. Ist in dieser Umgebung auch $1+\lambda$ positiv (wenigstens für genügend kleine Werte von v), so nimmt die Gleichung (10.) die Form an

$$(10'.)\qquad U'' = K - f(v)\frac{U'}{v},$$

wo K in einem Gebiete T um den Punkt $r=0$ herum nicht negativ ist, sobald nur die Anfangsgeschwindigkeit genügend klein gewählt wird, und K kann nur für $r=0$ verschwinden.

Ein Blick auf die Gleichungen (9.) und (10^{I}.) zeigt daher, daß diese sich im wesentlichen nur darin unterscheiden, daß U' und U'' an Stelle von r' und r'' stehen. Man kann daher bei denselben Voraussetzungen über $f(v)$ aus (10'.) bezüglich des Anwachsens von U dieselben Schlüsse ziehen, die wir aus (9.) (resp. (2.)) bezüglich r gezogen haben*), und den Satz aussprechen:

---

*) Man kann nämlich (10'.) auf die Form bringen:

$$U'' = K - Q\frac{f(v):v}{f(v\cos(Q,v)):v\cos(Q,v)}f(v\cos(Q,v)).$$

Wirken auf einen freien materiellen Punkt

1. *eine freie Kraft, deren Potential U nur von der Lage des Punktes abhängt,*

2. *eine der Geschwindigkeit v entgegengesetzte Widerstandskraft $f(v)$,*

3. *eine in den Krümmungsradius der Bahn fallende Widerstandskraft* $\lambda \frac{v^2}{\varrho}$ **(wo ϱ den Krümmungsradius bezeichnet),** *so ist der frei bewegliche materielle Punkt in G in labilem Gleichgewicht, wenn* 1) *in der von G ausgehenden Taylorschen Entwicklung von U das erste nicht identisch verschwindende Glied von gerader Ordnung ist und die Hessesche Determinante samt den Hauptminoren positive Formen sind, wenn* 2) *für genügend kleine v das Verhältnis $\frac{f(v)}{v}$ kleiner als eine angebbare Größe ist, oder wenn für genügend kleine abnehmende v dieses Verhältnis monoton wächst, während $f(0)=0$ ist, und wenn* 3) *die Größe $1+\lambda > 0$ ist.*

Die hier für U aufgestellte genügende Bedingung ist erfüllt, wenn U in G ein Minimum wird und diese Eigenschaft im quadratischen Glied U_2 der *Taylor*schen Entwickelung von U sich offenbart; ist $U_2 \equiv 0$, so ist die Bedingung im allgemeinen selbstverständlich nicht erfüllt. Die für den in die Normale fallenden Widerstand hier aufgestellte genügende Bedingung ist hingegen viel weniger beschränkend als die in Nr. III gefundene; die geometrische Bedeutung dieser Bedingung $(1+\lambda > 0)$ ist die, daß die Komponente der freien Kraft in Richtung des Krümmungsradius denselben Sinn hat wie der von dem materiellen Punkt gegen den Krümmungsmittelpunkt gerichtete Vektor.

Sur quelques transformations des équations différentielles du premier ordre.

Par M. *Georges Rémoundos* à Athènes.

1. Envisageons les équations différentielles du premier ordre de la forme:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)} \tag{1.}$$

où les $P(x, y)$ et $Q(x, y)$ désignent des fonctions uniformes par rapport à x et polynômes par rapport à y.

Le théorème fondamental de *Cauchy* sur l'existence d'une intégrale *unique* répondant à des conditions initiales régulières nous conduit à quelques transformations remarquables des équations différentielles du premier ordre, que nous exposerons dans ce travail.

Si nous faisons sur l'équation différentielle la substitution: $y = \frac{1}{Y}$, nous trouvons une transformée de la forme:

$$\frac{dY}{dx} = f_1(x, Y) = \frac{P_1(x, Y)}{Q_1(x, Y)} \tag{2.}$$

et nous savons que les conditions initiales singulières correspondent aux valeurs de x qui satisfont aux résultats de l'élimination de y entre les équations:

$$P(x, y) = 0 \qquad Q(x, y) = 0$$

d'une part et les équations:

$$P_1(x, y) = 0 \qquad Q_1(x, y) = 0$$

d'autre part.

L'ensemble (E) de ces points du plan x est, en général, dénombrable; il est fini dans le cas, où les $P(x, y)$ et $Q(x, y)$ sont polynômes aussi en x. Nous nous placerons dans ce cas pour fixer les idées.

2. Le théorème fondamental de *Chauchy* nous conduit immédiatement au théorème suivant:

Théorème I. „*Si nous considérons deux intégrales quelconques y_1 et y_2 de l'équation différentielle, la différence $y_1 - y_2$ ne saurait s'annuler qu'aux points de l'ensemble (E), c'est-à-dire cette fonction $y_1 - y_2$ n'a qu'un nombre fini de zéros.*"*)

Une intégrale quelconque de l'équation différentielle donnée peut admettre un nombre infini de zéros; il est évidemment intéressant d'avoir une transformation qui fasse disparaître les zéros qui se trouvent dans le domaine de l'infini de toutes les intégrales *simultanément.* Une telle transformation, conduisant à une équation différentielle transformée, dont toutes les intégrales n'admettent qu'un nombre fini de zéros, est la suivante:

$$y - y_1 = \omega \tag{3.}$$

y_1 désignant une intégrale particulière de l'équation différentielle donnée. Nous avons donc le théorème suivant:

Théorème II. „*La transformation* (3.) *fait disparaître dans l'intégrale générale tous les zéros mobiles: les zéros des intégrales de l'équation transformée sont tous fixes et en nombre fini.*"

La transformation:

$$y - y_1 = \frac{1}{\varphi}$$

fournit le même résultat pour les infinis de l'intégrale générale, qui deviennent tous fixes de sorte que toutes les intégrales de l'équation transformée sont finies dans le domaine de l'infini.

Nous pouvons constater cela dans l'exemple de l'équation de *Riccati*, dont l'intégrale générale est de la forme:

$$y = \frac{C.A(x) + B(x)}{C.\Gamma(x) + \Delta(x)},$$

---

*) Dans un ordre d'idées analogue, M. *Pétrovitch* a trouvé d'autres résultats sur les transcendentes uniformes satisfaisant à une équation du premier orde. (Voir: M. *Pétrovitch*, thèse de doctorat, Paris, *Gauthier-Villars*, et M. *Picard*, *Traité* d'analyse t. III p. 356).

C étant la constante arbitraire et les $A(x), B(x), \Gamma(x), \Delta(x)$ désignant des fonctions déterminées de x.

Si y_1 désigne une intégrale partielle correspondant à la valeur $C = C_1$ nous aurons:

$$(4.)\qquad y - y_1 = \frac{(A\Delta - B\Gamma)(C - C_1)}{(\Gamma C + \Delta)(\Gamma C_1 + \Delta)}$$

et nous voyons que les zéros de la fonction $\omega = y - y_1$ doivent ou bien annuler la fonction $A\Delta - B\Gamma$, qui ne dépend pas de la constante arbitraire, ou bien rendre infinie une, au moins, des fonctions Γ et Δ. Il en est de même des infinis.

3. Les transformations exposées dans les paragraphes précédents se complètent par une autre plus générale, qui exige la connaissance de trois intégrales particulières y_1, y_2 et y_3 et rend fixes les zéros et les infinis (simultanément) de l'intégrale générale.

Pour cette transformation nous utilisons la notion du rapport anharmonique de quatre quantités, qui semble avoir une signification particulière pour la théorie des équations différentielles du premier ordre*).

Considérons un rapport anharmonique de quatre intégrales y_1, y_2, y_3 et y et posons:

$$(5.)\qquad \frac{y - y_2}{y - y_3} : \frac{y_1 - y_2}{y_1 - y_3} = \frac{(y - y_2)(y_1 - y_3)}{(y - y_3)(y_1 - y_2)} = t$$

y_1, y_2, y_3 désignant trois intégrales connues et y une intégrale quelconque. Pour que la variable t s'annule, il faut ou bien que les différences $y - y_2$, $y_1 - y_3$ s'annulent ou bien qu'une des intégrales y, y_1, y_2, y_3 prenne une valeur infinie, ou bien que plusieurs intégrales $y, y_1 y_2 y_3$ deviennent infinies simultanément. La première circonstance ne se présente qu'aux points de l'ensemble (E) d'après le théorème I. Dans la seconde circonstance, la variable t ne devient pas du tout nulle qu'aux points de l'ensemble (E), comme nous voyons en écrivant la formule (5.) comme il suit:

$$t = \frac{(y - y_2)\left(1 - \frac{y_3}{y_1}\right)}{(y - y_3)\left(1 - \frac{y_2}{y_1}\right)}$$

*) Voir aussi: *Sur les fonctions ayant un nombre fini de branches*, Journal de mathématiques pures et appliquées, 1906, fasc. I.

lorsque y_1 tend vers l'infini, la variable t tend à la même limite que le quotient: $\frac{y-y_2}{y-y_3}$, qui est finie et différente de zéro, s'il s'agit de points n'appartenant pas à l'ensemble (E).

Enfin, la troisième circonstance ne se présente aussi que pour les points de l'ensemble (E) d'après la définition même de cet ensemble.

Nous faisons une discussion analogue pour les infinis de la variable t, qui coïncident ou bien avec les infinis communs de deux, au moins, des intégrales y, y_1, y_2, y_3 ou bien avec les zéros des différences $y-y_3$ et y_1-y_2. Tout cela n'est possible qu'aux points de l'ensemble (E).

En effectuant, donc, sur l'équation différentielle donnée la transformation (5.), qui est visiblement homographique, nous la transformons à une autre, dont l'intégrale générale n'a pas des infinis mobiles ni des zéros (c'est-à-dire, dépendant de la constante arbitraire). Nous avons, par conséquent, le théorème suivant:

Théorème III. *La transformation* (5.) *fait disparaître tous les zéros mobiles et tous les infinis mobiles de l'intégrale générale. De plus, les zéros et infinis* (*fixes*) *qui restent sont en nombre fini.*

Ces théorèmes s'étendent, avec de legères modifications, à des équations différentielles linéaires par rapport à la dérivée y' d'une classe plus étendue que celle que nous avons examinée dans ce travail.

Nous laissons au lecteur le soin de cette extension.

5. Si nous posons:

$$\frac{y_1-y_2}{y_1-y_3}=\frac{1}{\theta(x)},$$

la transformation (5.) prend la forme:

$$\frac{y-y_2}{y-y_3}=\theta t \quad \text{ou} \quad y=\frac{y_2-y_3\theta t}{1-\theta t}.$$

L'équation différentielle transformée sera évidemment satisfaite pour $t=0$ et $t=\infty$ et ces deux intégrales, qui correspondent aux intégrales $y=y_2$ et $y=y_3$ de l'équation donnée, échappent naturellement à notre théorème.

6. Si les zéros et les infinis (qui sont fixes) de l'intégrale générale de la transformée sont algébriques avec des degrés de multiplicité fixes (c'est-à-dire ne dépendant pas de la constante arbitraire), il y a encore une transformation intéressante, que nous allons citer.

Formons en effet une fonction algébrique $a(z)$ admettant les mêmes zéros et infinis avec l'intégrale générale de la transformée avec les mêmes degrés de multiplicité (ce qui se fait immédiatement, lorsqu'on connaît les zéros et les infinis avec leurs degrés de multiplicité) et posons:

$$t = a(z) \cdot \varphi.$$

Il est clair que la fonction φ de x et de la constante arbitraire C n'admettra des zéros et des infinis que pour un ensemble dénombrable de valeurs de la constante C.

Donc, la nouvelle équation différentielle transformée en φ aura la propriété suivante: *Les intégrales de cette équation sont totalement dépourvues de zéros et d'infinis, sauf, peut-être, un ensemble dénombrable d'entr'elles.*

Cette dernière transformation exige la connaissance des zéros et des infinis avec leurs degrés de multiplicité, tandis que les transformations précédentes n'exigent que la connaissance de trois intégrales particulières. Au point de vue théorique, nous avons le résultat remarquable suivant pour les cas considérés dans le paragraphe actuel, à savoir:

„*Une transformation homographique fait disparaître tous les zéros et les infinis des intégrales, sauf, peut-être, un ensemble dénombrable d'entr'elles.*"

Bekanntmachung.

Auf Grund des von dem verstorbenen Herrn *Dr. Paul Wolfskehl* in Darmstadt uns zugewendeten Vermächtnisses wird hiermit ein Preis von 100000 M., in Worten: „einhunderttausend Mark", für denjenigen ausgesetzt, dem es zuerst gelingt, den Beweis des großen *Fermat*schen Satzes zu führen. Herr *Dr. Wolfskehl* bemerkt in seinem Testamente, daß *Fermat* (siehe z. B. Oeuvres de *Fermat*, Paris 1891, t. I pg. 291 observ. II) mutatis mutandis die Behauptung aufgestellt hat, daß die Gleichung $x^\lambda + y^\lambda = z^\lambda$ durch ganze Zahlen unlösbar ist für alle diejenigen Exponenten λ, welche ungerade Primzahlen sind. Dieser *Fermat*sche Satz ist entweder im Sinne *Fermats* allgemein oder in Ergänzung der Untersuchungen von *Kummer* (Crelles Journal 40, S. 130ff., Abh. der Akad. d. Wiss. zu Berlin 1857) für alle die Exponenten λ zu beweisen, in denen er überhaupt Geltung hat. Ueber weitere Literatur vergleiche man: *Hilbert*, Theorie der algebraischen Zahlkörper, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung IV (1894—95) § 172—173 und Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften, Bd. 1, Teil 2 Arithmetik und Algebra (1900—1904) IC4b, S. 713.

Die Aussetzung des Preises erfolgt unter folgenden näheren Bedingungen:

Die Königliche Gesellschaft der Wissenschaften in Göttingen entscheidet frei darüber, wem der Preis zuzuerkennen ist. Sie lehnt die Annahme jeder Manuskriptsendung ab, die auf die Bewerbung um den Preis für den *Fermat*schen Satz Bezug hat; sie berücksichtigt für die Preiszuteilung lediglich solche mathematische Abhandlungen, die in periodischen Zeitschriften, als Monographien oder in Buchform im Buchhandel käuflich erschienen sind. Die Gesellschaft stellt dem Verfasser solcher Abhandlungen anheim, etwa 5 gedruckte Exemplare davon an sie einzusenden.

Außer Betracht bleiben für die Verleihung des Preises solche Arbeiten, die in einer Sprache gedruckt sind, welche den zur Beurteilung der Arbeit berufenen Fachgelehrten unverständlich ist. An die Stelle solcher Arbeiten können vom Verfasser als richtig anerkannte Uebersetzungen treten.

Die Gesellschaft lehnt alle Verantwortlichkeit für eine Nichtberücksichtigung von Arbeiten ab, die nicht zu ihrer Kenntnis gelangt sind, desgleichen für alle Irrtümer, die daraus entspringen könnnten, daß der wirkliche Verfasser der Arbeit oder eines Teiles derselben als solcher der Gesellschaft unbekannt geblieben ist.

Sie behält sich für den Fall, daß an der Lösung der Aufgabe mehrere Personen beteiligt sind oder die Lösung durch die Arbeiten mehrerer Gelehrter herbeigeführt worden ist, freieste Entscheidung, insbesondere auch die Teilung des Preises nach ihrem Ermessen vor.

Die Zuerkennung des Preises durch die Gesellschaft erfolgt frühestens zwei Jahre nach der Veröffentlichung der zu krönenden Abhandlung. Es soll innerhalb dieses Zeitraumes deutschen und ausländischen Mathematikern Gelegenheit geboten werden,

über die Richtigkeit der durch die Veröffentlichung bekannt gewordenen Lösung sich zu äußern.

Ist der Preis durch die Gesellschaft zuerkannt, so wird davon den Berechtigten durch den vorsitzenden Sekretär im Namen der Gesellschaft Mitteilung gemacht und solches öffentlich an allen denjenigen Orten bekannt gegeben werden, an denen der Preis im letzten Jahre ausgeschrieben war. Die Zuerkennung des Preises durch die Gesellschaft ist unanfechtbar.

Die Auszahlung des Preises erfolgt an den Berechtigten innerhalb dreier Monate nach seiner Zuerkennung durch die Königliche Universitätskasse in Göttingen oder auf Gefahr und Kosten des Empfängers an einem anderen von ihm zu bezeichnenden Orte, und zwar wird das vermachte Kapital je nach der Wahl der Gesellschaft bar oder in den hierfür hinterlegten Papieren gegen rechtsgültige Quittung zur Auszahlung gebracht. Die Auszahlung des Preises kann durch Aushändigung der hinterlegten Wertpapiere auch dann erfolgen, wenn deren Kurswert die Summe von 100000 M. nicht mehr erreichen sollte.

Falls der Preis bis zum 13. September 2007 nicht zuerkannt ist, können Ansprüche auf ihn nicht mehr erhoben werden.

Mit dem heutigen Tage tritt die *Wolfskehl*sche Preisstiftung unter den vorstehend angegebenen Bedingungen in Kraft.

Göttingen, den 27. Juni 1908.

Die Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.





